Exercices sur le calcul d'erreur

Expérience

Vous avez mesuré les dimensions d'un parallélipipède. Désignons-les par a, b, c et notons Δa, Δb, Δc les incertitudes affectant ces mesures. Pour des incertitudes petites comparées aux valeurs mesurées, nous ne commettons qu'une très petite erreur si nous remplaçons l'accroissement total de la fonction par sa différentielle (voir document « Calcul d'erreur »). Dorénavant, nous utiliserons donc, pour calculer l'incertitude qui affecte un résultat, la différentielle de la fonction qui lie ce résultat aux mesures. Pour les mesures que vous avez effectuées, ces fonctions sont les suivantes :

a) la longueur l des arêtes du parallélipipède est donnée par $l = 4a + 4b + 4c$

b) la surface S du parallélipipède est donnée par $S = 2ab + 2ac + 2bc$

c) le volume V du parallélipipède est donné par $V = abc$.

Utilisation du logiciel *Mathematica* (ATTENTION, c'est à vous d'exprimer correctement les résultats !)

Définissons chacune de ces fonctions et utilisons sa différentielle totale pour exprimer l'incertitude sur les résultats :

```
l[a_, b_, c_] := 4 (a + b + c)
Δl = Abs[D[l[a, b, c], a]] Δa + Abs[D[l[a, b, c], b]] Δb + Abs[D[l[a, b, c], c]] Δc
```

$4\,\Delta a + 4\,\Delta b + 4\,\Delta c$

Nous constatons que la différentielle totale fournit une expression identique à celle donnée par la règle pour l'addition (voir document « Erreur et incertitude »). Calculons la longueur l et l' incertitude Δl pour des valeurs a, b, c, Δa, Δb, Δc :

```
l[a, b, c] /. {a → 10.2, Δa → 0.1, b → 7.7, Δb → 0.08, c → 3.17, Δc → 0.04}
Δl /. {a → 10.2, Δa → 0.1, b → 7.7, Δb → 0.08, c → 3.17, Δc → 0.04}
```

```
84.28
```

```
0.88
```

Procédons de même pour la surface :

```
s[a_, b_, c_] := 2 (a * b + a * c + b * c)
Δs = Abs[D[s[a, b, c], a]] Δa + Abs[D[s[a, b, c], b]] Δb + Abs[D[s[a, b, c], c]] Δc
s[a, b, c] /. {a → 10.2, Δa → 0.1, b → 7.7, Δb → 0.08, c → 3.17, Δc → 0.04}
Δs /. {a → 10.2, Δa → 0.1, b → 7.7, Δb → 0.08, c → 3.17, Δc → 0.04}
```

$2\,\Delta c\,|a+b| + 2\,\Delta b\,|a+c| + 2\,\Delta a\,|b+c|$

```
270.566
```

```
5.7452
```

Et pour le volume :

```
v[a_, b_, c_] := a * b * c
Δv = Abs[D[v[a, b, c], a]] Δa + Abs[D[v[a, b, c], b]] Δb + Abs[D[v[a, b, c], c]] Δc
v[a, b, c] /. {a → 10.2, Δa → 0.1, b → 7.7, Δb → 0.08, c → 3.17, Δc → 0.04}
Δv /. {a → 10.2, Δa → 0.1, b → 7.7, Δb → 0.08, c → 3.17, Δc → 0.04}
```

$\Delta c\,|a\,b| + \Delta b\,|a\,c| + \Delta a\,|b\,c|$

```
248.972
```

```
8.16922
```

Exercices

Exercice 1

Attention, la différence des diamètres donne 2 fois l'épaisseur : 26.7 - 19.5 = 7.2 mm = $2e$

En appliquant la règle pour la soustraction, vous obtenez donc, pour l'épaisseur $e = 3.6 \pm 0.1$ mm et pour la précision $\frac{\Delta e}{e} \approx 3\%$

Exercice 2

L'aire du cercle est donnée par $S = \pi R^2$. En appliquant la règle pour la multiplication, vous obtenez $S = 85.3 \pm 3.3$ cm^2. La précision est fournie par l'incertitude relative $\frac{\Delta S}{S} \approx 3.9$ %

Exercice 3

Définissons les fonctions donnant le périmètre p, la surface S du sol et le volume V de la salle et utilisons les différentielles totales pour calculer l'incertitude sur les résultats (ATTENTION, à vous de les exprimer correctement !)

```
p[a_, b_] := 2 (a + b)
Δp = Abs[D[p[a, b], a]] Δa + Abs[D[p[a, b], b]] Δb
p[a, b] /. {a → 10.2, Δa → 0.1, b → 7.7, Δb → 0.08}
Δp /. {a → 10.2, Δa → 0.1, b → 7.7, Δb → 0.08}
```

$2\,\Delta a + 2\,\Delta b$

```
35.8
```

```
0.36
```

```
s[a_, b_] := a * b
Δs = Abs[D[s[a, b], a]] Δa + Abs[D[s[a, b], b]] Δb
s[a, b] /. {a → 10.2, Δa → 0.1, b → 7.7, Δb → 0.08}
Δs /. {a → 10.2, Δa → 0.1, b → 7.7, Δb → 0.08}
```

$\Delta b\,|a| + \Delta a\,|b|$

```
78.54
```

```
1.586
```

```
v[a_, b_, c_] := a * b * c
Δv = Abs[D[v[a, b, c], a]] Δa + Abs[D[v[a, b, c], b]] Δb + Abs[D[v[a, b, c], c]] Δc
v[a, b, c] /. {a → 10.2, Δa → 0.1, b → 7.7, Δb → 0.08, c → 3.17, Δc → 0.04}
Δv /. {a → 10.2, Δa → 0.1, b → 7.7, Δb → 0.08, c → 3.17, Δc → 0.04}
```

$\Delta c\,|a\,b| + \Delta b\,|a\,c| + \Delta a\,|b\,c|$

```
248.972
```

```
8.16922
```

Exercice 4

La masse volumique ρ de l'objet est donnée par le quotient de sa masse par son volume. En appliquant la règle pour la division, vous obtenez ρ = 1.91 ± 0.09 g/cm^3

Exercice 5

Le volume du cylindre est donné par $V = \pi R^2 h$. En appliquant les règles, vous obtenez V = 50.27 ± 0.19 cm^3 pour le volume et ρ = 7.80 ± 0.03 g/cm^3 pour la masse volumique

Exercice 6

Définissons la fonction reliant g aux grandeurs mesurées, puis calculons g et Δg :

```
f[d_, T_] := 4 Pi^2 d / T^2
Δg = Abs[D[f[d, T], d]] Δd + Abs[D[f[d, T], T]] ΔT
N[f[d, T]] /. {d -> 1, Δd -> 0.005, T -> 2, ΔT -> 0.01}
Δg /. {d -> 1, Δd -> 0.005, T -> 2, ΔT -> 0.01}
```

$$\frac{4\,\pi^2\,\Delta d}{|T|^2} + 8\,\pi^2\,\Delta T\left|\frac{d}{T^3}\right|$$

```
9.8696
```

```
0.148044
```

IMPORTANT. Le résultat se donne de la manière suivante : g = 9.87 ± 0.15 m/s^2. L'erreur relative vaut environ 1.5%