Expérience no 5

ETUDE DU PENDULE

1. RAPPEL

Les lois fondamentales de la dynamique sont:

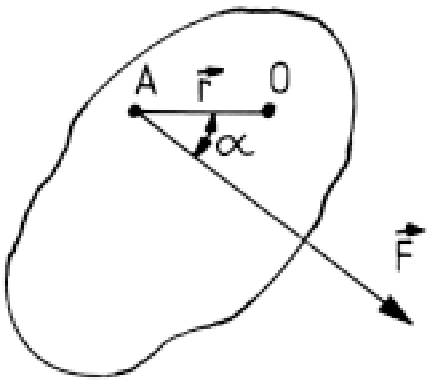
- la loi d'inertie: un corps soumis à aucune force est en mouvement rectiligne uniforme
- la loi d'action = réaction: tout corps agissant sur un autre corps par une force est soumis de la part de celui-ci à une force égale, opposée en direction
- la loi du mouvement: postulée par Newton, elle s'exprime ainsi l'accélération produite par une force $\vec{F}$ agissant sur un mobile de masse m, est inversement proportionnelle à la masse:

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F} \quad \text{ou:} \quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{1}{m}\vec{F}$$

d'où l'on tire l'équation du mouvement:

$$\boxed{m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}}$$

Dans le cas d'un solide rigide possédant un point fixe, on définit:



A: point d'attache de la force

O: centre fixe

le moment d'une force extérieure $\vec{F}$ par rapport au point 0, comme

$$\boxed{\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F}}$$

produit vectoriel de la force $\vec{F}$ et du vecteur support (entre le centre fixe et le point d'application de la force)

$|\vec{M}_0| = F \cdot r \cdot \sin\alpha$, $\vec{M}_0$ est $\perp$ au plan contenant $\vec{r}$ et $\vec{F}$.

Ce moment de force $\vec{M}$ va engendrer (ou faire varier) une rotation de ce corps, donc de son moment cinétique $\vec{B}$.

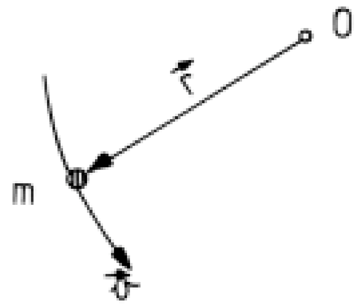
Le théorème du moment cinétique:

$$\boxed{\frac{d\vec{B}_0}{dt} = \vec{M}_0}$$

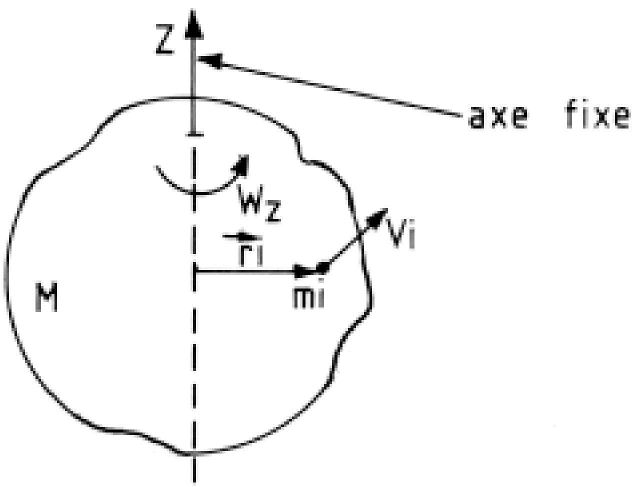
montre que la variation du moment cinétique est égale à la somme des moments extérieurs.

Rappel: Dans le cas simple d'une masse ponctuelle tournant autour d'un centre 0, le moment cinétique vaut:

$$\vec{b}_0 = \vec{r} \times m\vec{v}$$



Pour un solide rigide, en rotation autour d'un axe z fixe à la vitesse angulaire ω, le moment cinétique vaut:



$$\vec{b}_i = \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i$$

$$M = \sum m_i$$

$$\vec{B} = \sum_i \vec{b}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i$$

comme $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ on peut écrire: $\vec{B} = \sum_i \left[\vec{r}_i \times m_i(\vec{\omega} \times \vec{r}_i)\right]$

Sous certaines conditions de symétrie qui sont réalisées dans cette expérience, on trouve que:

$$\boxed{|\vec{B}| = B_z = \theta_z \cdot \omega_z}$$

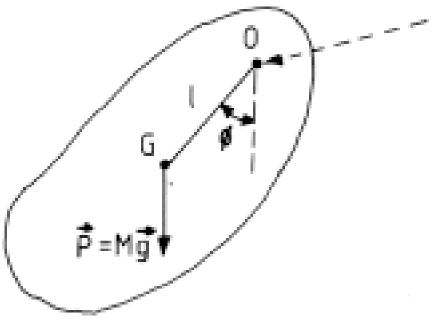
où θ_z = <u>moment d'inertie</u> par rapport à l'axe z.

Le moment cinétique $\vec{B}$ est donc parallèle à $\vec{\omega}$ (ce qui n'a pas lieu dans le cas général).

2. APPLICATION AU PENDULE

<u>Définition</u>: Un pendule est un corps solide pouvant tourner autour d'un axe horizontal et qui oscille sous l'effet de la gravitation autour d'une position d'équilibre stable.

2.1. Le pendule physique



axe de rotation

G: centre de gravité

θ: moment d'inertie du solide par rapport à l'axe de rotation.

Le théorème du moment cinétique nous donne:

$$\frac{d\vec{B}_o}{dt} = \vec{M}_O \Rightarrow \theta\,\ddot{\phi} = -\,Mg\ell\sin\phi$$

ou

$$\ddot{\phi} + \frac{Mg\ell}{\theta}\sin\phi = 0 \qquad \text{(I)}$$

équation différentielle du mouvement du pendule physique d'où l'on tire <u>l'équation horaire</u> du mouvement: $\phi = \phi(t)$

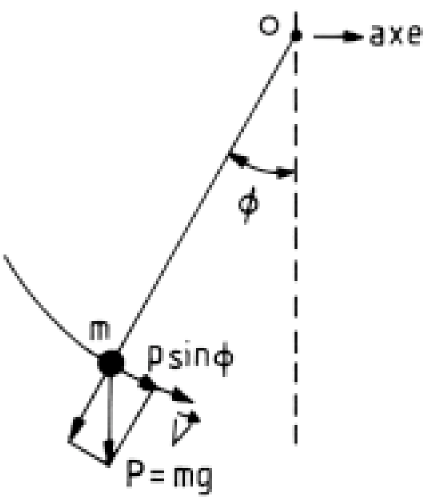
La solution de l'équation (I) est difficile si ϕ peut être grand; dans ce cas, la période des oscillations varie avec l'amplitude. En revanche, si ϕ est petit, **$\sin\phi \approx \phi$**, et l'équation (I) devient:

$$\ddot{\phi} + \frac{Mg\ell}{\theta}\phi = 0 \qquad \text{(II)}$$

Cette équation différentielle est du type:

$\ddot{x} + \Omega^2 x = 0$ équation différentielle de l'oscillateur harmonique.

2.2. Le pendule simple



C'est le cas idéal du pendule composé d'un point de masse m suspendu à un fil sans poids de longueur ℓ (pendule mathématique).

Ici, on a : $\theta_0 = m\ell^2$ moment d'inertie
$M_0 = -mg\ell\sin\phi$ moment de force

et l'équation du mouvement devient:

$$\frac{d\vec{B}_0}{dt} = \vec{M}_0 \quad \text{ou:} \quad \frac{d}{dt}\left(\theta\dot{\phi}\right) = -mg\ell\sin\phi$$

d'où:

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{\ell}\sin\phi = 0$$

Si ϕ petit, $\sin\phi \approx \phi$, alors:

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{\ell}\phi = 0 \quad \text{(III)} \quad \text{(oscillateur harmonique)}$$

2.3. Résolution des équations

Les équations II et III sont du même type; l'intégration de ces équations permet de trouver la solution générale pour $\phi = \phi(t)$:

$$\boxed{\phi(t) = A\cdot\sin(\omega t + \alpha)}$$

(on peut vérifier en introduisant cette solution dans les équations).

avec: $\omega^2 = \dfrac{g}{\ell}$ pour le cas du pendule simple

$\omega^2 = \dfrac{Mg\ell}{\theta}$ pour le cas du pendule physique

A et α sont des constantes d'intégration qui dépendent des conditions initiales.
Par exemple, si le pendule est lâché à vitesse nulle avec un angle de départ ϕ_o, on obtient:

$A = \phi_o$ et $\alpha = \pi/2$ (sachant que $\phi(t=0) = \phi_o$ et $\dot{\phi}(t=0) = 0$) soit:

$$\boxed{\phi = \phi_0\cos(\omega t)}$$

C'est une oscillation harmonique sinusoïdale dont la période vaut:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad \text{dans le cas du pendule simple}$$

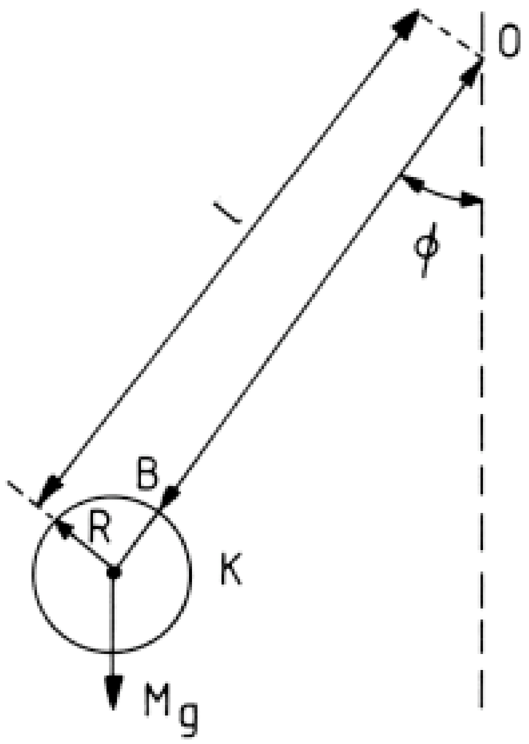
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\theta}{Mg\ell}} \quad \text{dans le cas du pendule physique}$$

Remarque: On appelle longueur réduite du pendule physique la longueur L du pendule simple ayant la même période, soit:

$$\frac{\theta}{Mg\ell} = \frac{L}{g} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\theta}{M\ell}$$

et la période vaut alors: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

2.4. Exemple de pendule physique



Considérons le cas d'un pendule composé d'une sphère K de rayon R suspendue à un fil de masse négligeable. Le moment d'inertie θ_0 de la sphère par rapport à l'axe 0 s'obtient par la règle de Steiner

$$\theta_0 = \theta_G + M\ell^2$$

θ_G étant le moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de gravité (voir l'introduction du TP gyroscope). Pour une sphère $\theta_G = 2MR^2/5$ (démonstration voir appendice). Dans ces conditions:

$$L = \left(\frac{2}{5}MR^2 + M\ell^2\right)\frac{1}{M\ell}$$

$$L = \ell + \frac{2}{5}\frac{R^2}{\ell} = \ell + \varepsilon$$

3. EXERCICES

1) Déterminer la période du petit pendule en fonction de l'amplitude pour des amplitudes comprises entre 0 et 90°. Mesurer trois fois la durée de 20 oscillations pour la même amplitude. Soit T_o la période pour une petite amplitude; on a vu qu'il y a un défaut d'isochronisme si l'amplitude augmente. On peut exprimer cette variation par une série (voir appendice):

$$T(\phi) = T_0\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\phi}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4\frac{\phi}{2} + \ldots\right)$$

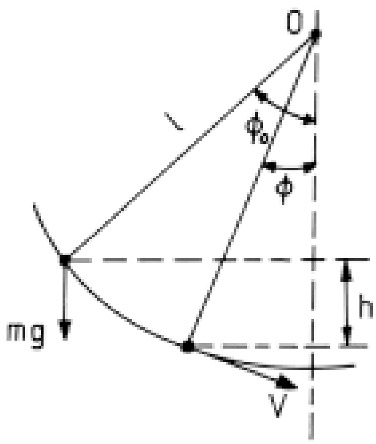
$$T(\phi)/T_0 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\phi}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4\frac{\phi}{2} + \ldots$$

Calculer et tracer la courbe $T(\phi)/T_0$ en fonction de ϕ et comparer avec la courbe déterminée par les mesures $T(\phi)/T(5^\circ)$ en fonction de ϕ.

2) Déterminer la longueur réduite du grand pendule en mesurant la longueur ℓ = OB + R et en ajoutant ε, après avoir mesuré R avec le pied à coulisse. On fait varier ℓ entre 70 cm et 1.20 m et on mesure pour chaque longueur la période T du pendule. Déterminer au chronomètre la durée de 20 oscillations complètes et répéter trois fois cette mesure. Tracer le graphique $T^2 = f(L)$ et en tirer g. Comparer la valeur trouvée à la valeur **g = 980,65 cm s^{-2}**, valable pour Neuchâtel.

APPENDICE

A) Pour l'étude exacte de la période en fonction de l'amplitude (défaut d'isochronisme), on a avantage à partir d'une relation équivalente à l'équation du mouvement qu'on obtient par le théorème de l'énergie:



$$E_{pot} = \frac{1}{2} mv^2$$

$$E_{pot} = mgh = mg\ell\ (\cos\phi - \cos\phi_o)$$

$$\text{or: } v = \ell \frac{d\phi}{dt}$$

$$\text{donc: } \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{\ell} (\cos\phi - \cos\phi_o)$$

On en tire:

$$dt = \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_o}}$$

La période T s'obtient en intégrant de $\phi = 0$ à ϕ_o, ce qui correspond à T/4 donc:

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_o^{\phi_o} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_o}} \qquad (1)$$

L'intégrale se simplifie par la substitution:

$$\sin\frac{\phi}{2} = \sin\frac{\phi_o}{2}\sin\varepsilon \qquad (2)$$

avec ε comme nouvelle variable d'intégration à prendre entre les limites 0 et $\pi/2$. En appliquant la formule trigonométrique connue

$$\sin^2\frac{\phi}{2} = \frac{1 - \cos\phi}{2}$$

On obtient d'abord:

$$\frac{1-\cos\phi}{2} = \sin^2\frac{\phi_o}{2}\sin^2\varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{1-\cos\phi_o}{2} = \sin^2\frac{\phi_o}{2}$$

En soustrayant la première de la seconde relation:

$$\cos\phi - \cos\phi_o = 2\sin^2\frac{\phi_o}{2}(1-\sin^2\varepsilon) = 2\sin^2\frac{\phi_o}{2}\cos^2\varepsilon$$

D'autre part, en différenciant (2):

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\phi}{2}d\phi = \sin\frac{\phi_o}{2}\cos\varepsilon d\varepsilon$$

et

$$d\phi = \frac{2\sin\frac{\phi_o}{2}\cos\varepsilon}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\phi}{2}}}d\varepsilon = \frac{2\sin\frac{\phi_o}{2}\cos\varepsilon}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\phi_o}{2}\sin^2\varepsilon}}d\varepsilon$$

Avec ces substitutions (1) devient:

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_o^{\pi/2}\frac{d\varepsilon}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\phi_o}{2}\sin^2\varepsilon}}$$

L'intégrale s'obtient sous forme d'une série de termes successifs si l'on remarque que l'intégrant

$$\left(1-\sin^2\frac{\phi_o}{2}\sin^2\varepsilon\right)^{-1/2}$$

est un binôme $(1-x)^{-1/2}$ où $x<1$. On peut donc appliquer le développement généralisé du binôme pour obtenir:

$$(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \ldots \text{où } x = \sin^2\frac{\phi_o}{2}\sin^2\varepsilon$$

série uniformément convergente qui peut s'intégrer terme à terme, ce qui donne:

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_o^{\pi/2}\left(1 + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\phi_o}{2}\sin^2\varepsilon + \frac{1.3}{2.4}\sin^4\frac{\phi_o}{2}\sin^2\varepsilon + \ldots\right)d\varepsilon$$

L' intégrale $\int_o^{\pi/2}\sin^{2n}\varepsilon d\varepsilon = \frac{\pi}{2}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}$ (formule de Wallis)

L'intégrale terme à terme se fait donc aisément et donne le résultat fin:

$$T(\phi) = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\phi_o}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\sin^4\frac{\phi_o}{2} + \ldots\right) \text{ avec } 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = T_o$$

(série du pendule)

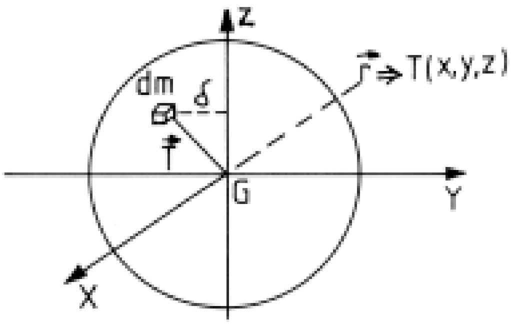
Cette formule montre bien que T dépend de l'amplitude et permet de calculer les déviations de l'isochronisme. En prenant la formule simple:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

on commet une erreur ne dépassant pas 1% pour ϕ_o<23° tandis qu'en prenant les deux premiers termes de la série l'erreur se réduit à 0,1%.

B) Moment d'inertie d'une sphère

Le moment d'inertie θ_G par rapport à un axe passant par le centre de gravité G est égal par définition à $\sum \delta^2 dm$.



δ représente la distance de l'élément de masse dm à l'axe considéré. Par raison de symétrie, 0G est le même pour tout axe passant par G, en particulier pour les trois axes rectangulaires x, y et z. On peut donc écrire indifféremment:

$$\theta_G = \int \delta^2 dm = \int (x^2+y^2)\ dm = \int (y^2+z^2)\ dm = \int (z^2+x^2) dm$$

donc $$3\theta_G = 2 \int (x^2+y^2+z^2)\ dm$$

mais $$\theta_g = \int (x^2+y^2+z^2)\ dm = \int r^2\ dm$$

s'appelle le moment d'inertie polaire par rapport au point G. Il s'ensuit que:

$$\theta_G = (2/3)\theta_g$$

Or θ_g s'obtient facilement en prenant pour dm la masse d'une couronne sphérique d'épaisseur dr, soit:

$$dm = 4\pi r^2 dr\rho \quad (\rho = \text{densité supposée constante})$$

ainsi $$\theta_G = \frac{8}{3}\pi\rho \int_0^R r^4 dr = (8/15)\pi\rho R^5$$

puisque $$M = (4/3)\pi\rho R^3$$

θ_G devient $$\theta_G = \frac{2}{5}\ MR^2$$