Lundi 7 mars 2005 à 17 h

Images

Bernard Vuilleumier

« Y a-t-il un pilote dans l'image ? ». C'est la question que pose Serge Tisseron dans un livre où il examine les effets, parfois néfastes, des images qui prolifèrent aujourd'hui dans tous les domaines. Les deux règles majeures que devrait adopter tout spectateur pour prévenir les dangers sont, à ses yeux, la maîtrise de l'espace et de la durée du spectacle. Je vous propose une incursion illustrée dans le domaine de la physique et des mathématiques à l'aide d'une simulation qui respecte à la lettre ces préceptes et qui ne présente aucun risque !

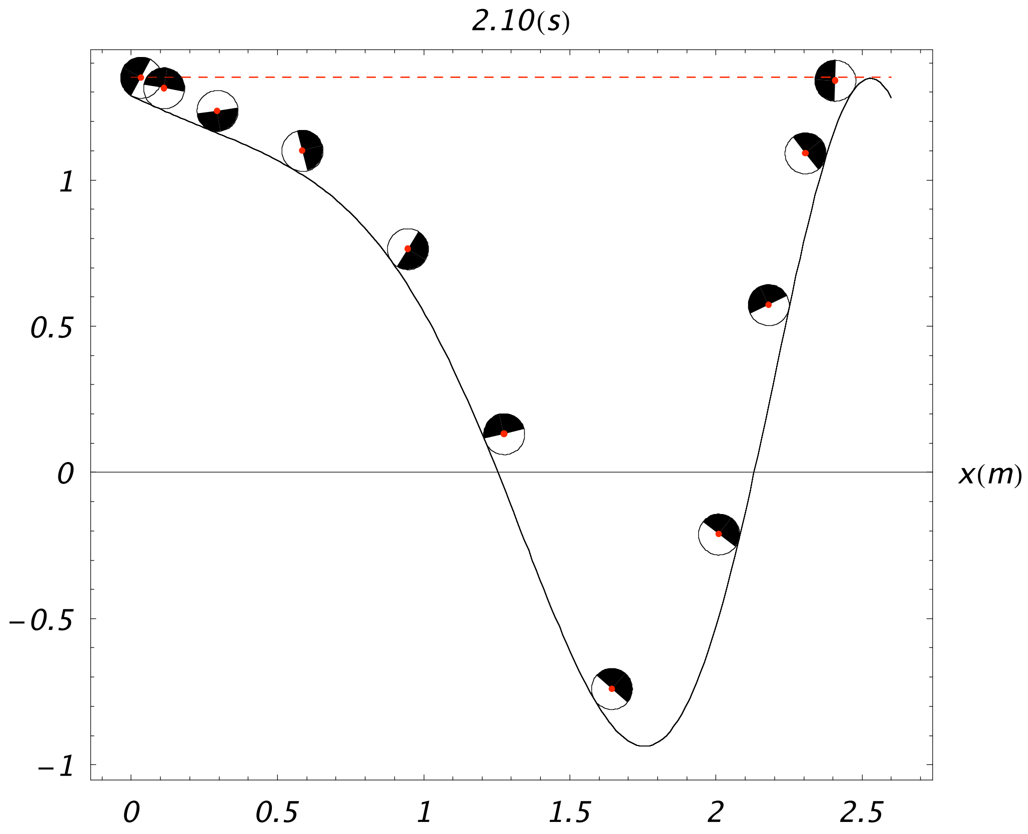

Fig. 1 : Simulation du mouvement d'une bille sur une trajectoire définie à l'aide d'une fonction. Le « pilote » de l'animation est la courbe $y = f(x)$ et le « moteur », la force de gravitation.

Prochaine réunion : lundi 4 avril 2005 à 17 h

■ Travaux pratiques

■ Dégager la physique du problème

En admettant que la bille sur la trajectoire $y = f(x)$ subit trois forces, son poids $m\vec{g}$, une force de soutien normale au plan $\vec{S}$ et une force de frottement opposée à la vitesse $\vec{F}$, écrivez l'expression donnant son accélération tangentielle a_t et son accélération normale a_n.

■ Définir une trajectoire

Définissez quelques trajectoires permettant de tester :
a) le nombre de tours effectués sur une trajectoire de courbure constante (cercle)
b) le nombre de tours effectués lorsque la courbure de la trajectoire n'est pas constante
c) la conservation de l'énergie

■ Présenter les données spatiales

Établissez les graphiques donnant :
a) la vitesse du mobile en fonction de sa position sur l'axe x.
b) l'accélération tangentielle a_t du mobile en fonction de sa position sur l'axe x.
c) l'accélération normale a_n du mobile en fonction de sa position sur l'axe x.
d) la composante a_x de l'accélération du mobile en fonction de sa position sur l'axe x.

■ Établir un lien entre l'espace et le temps

Écrivez l'équation différentielle qui établit le lien entre les données spatiales et temporelles. Résolvez numériquement cette équation et établissez les graphiques donnant l'abscisse et l'ordonnée du mobile en fonction du temps.

■ Réaliser une simulation

Utilisez la solution de l'équation différentielle pour réaliser une simulation qui permet de visualiser le mouvement d'un corps solide (bille, cylindre, anneau) sur une trajectoire en laissant à l'utilisateur le choix de :
- la forme et l'étendue de la trajectoire $y = f(x)$
- l'intensité de la gravitation $\vec{g}$
- la position initiale x_0 du corps
- la grandeur et le sens de la vitesse initiale $\vec{v_0}$ du corps
- le rayon r, la masse volumique ρ et le moment d'inertie I du corps
- la durée et le nombre d'images de l'animation.

■ Pour en savoir plus

• Serge Tisseron. *Y a-t-il un pilote dans l'image ? Six propositions pour prévenir les dangers de l'image*. Editions Aubier, Paris 1998, 176 p.

Images : corrigé

▪ Physique du problème

La bille subit trois forces : son poids $m\vec{g}$, une force de soutien normale au plan $\vec{S}$ et une force de frottement opposée à la vitesse $\vec{F}$. En projetant les forces sur la *tangente* à la trajectoire, on obtient :

$$mg\sin\theta - F = ma_t$$

Si nous tenons compte du moment d'inertie I de la bille de rayon r, la loi fondamentale de la dynamique permet d'écrire que la somme des moments $\mathcal{M}$ des forces par rapport au centre de gravité divisée par le moment d'inertie de la bille est égale à l'accélération angulaire α :

$$\sum\mathcal{M} = I\alpha$$

La seule force dont le moment n'est pas nul est la force de frottement F (le support des deux autres forces passe par le centre de gravité) :

$$Fr = I\alpha$$

Dans le référentiel du centre de gravité, l'accélération tangentielle du point de contact vaut :

$$r\alpha = \frac{F\,r^2}{I}$$

Cette valeur fournit l'accélération tangentielle du point de contact, vue depuis le centre de gravité, et réciproquement, l'accélération tangentielle du centre de gravité vue depuis le point de contact. En éliminant F entre les deux égalités ci-dessus et en résolvant par rapport à a, on obtient :

$$a_t = \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{I}{m\,r^2}}$$

L'accélération tangentielle du centre de masse d'un corps qui roule sur une courbe est donc toujours inférieure à celle d'un corps qui glisse sans frottement de contact. L'accélération normale du centre de masse n'est nulle que si la courbure k de la trajectoire décrite par le centre de masse est nulle (plan incliné par exemple) ou si la vitesse v de la bille est nulle. Dans les autres cas, l'accélération normale du centre de masse est donnée par :

$$a_n = kv^2$$

Lorsque l'accélération tangentielle et normale de la bille sont connues, on peut trouver son accélération selon l'axe x par projection (l'angle entre la tangente à la trajectoire et l'axe x s'obtient à partir de la dérivée de la fonction $y = f(x)$ qui décrit la trajectoire du centre de masse). La position selon x et donc aussi selon $y = f(x)$ s'obtient en intégrant l'équation différentielle $x''(t) = a_x\,(x(t))$.

■ Définir une trajectoire

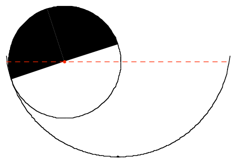

Fig. 2 : $f(x) = -\sqrt{4-(x-2)^2}$
$x_{min} = 0.01$
$x_{max} = 3.99$

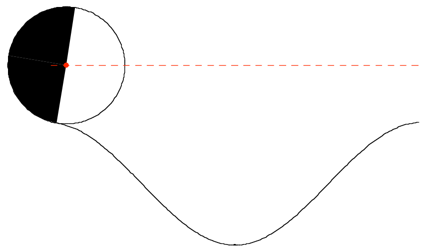

Fig. 3 : $f(x) = \mathrm{Cos}(x) + 0.01(x-\pi)^2$
$x_{min} = 0$
$x_{max} = 2\pi$

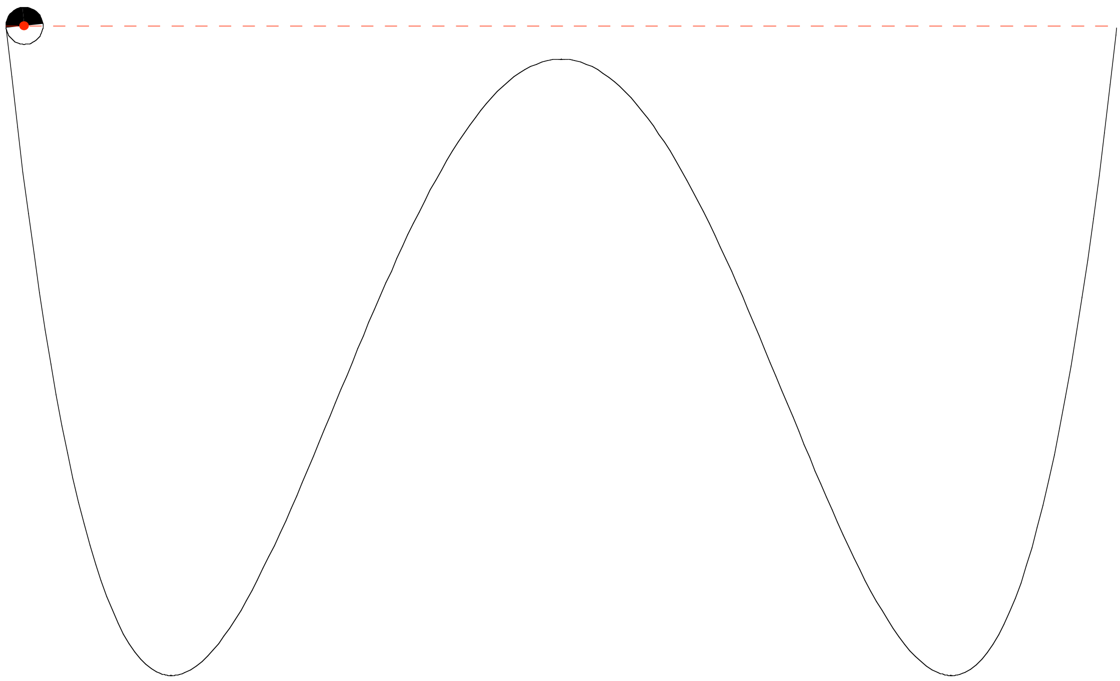

Fig. 4 : $f(x) = 0.05x^4 - x^2$
$x_{min} = -4.5$
$x_{max} = 4.5$

Corrigé complet sur : http://Hypatie.ge.ch