MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORMEMENT ACCELERE (MCUA)

Définition

Un mouvement circulaire uniformément accéléré (MCUA) est caractérisé par une trajectoire circulaire et une accélération *angulaire* constante.

L'accélération centripète

Dans un MCU, rappelons que le vecteur accélération est toujours de norme constante et dirigé vers le centre de la trajectoire, raison pour laquelle on l'appelle accélération centripète ($\vec{a}_C$). L'horaire de ses coordonnées polaires est donné par :

$$\begin{cases} a_C = r\omega^2 \\ \theta_{a_C} = \omega t + \pi \end{cases}$$

Dans le cas d'un mouvement circulaire où la norme du vecteur vitesse n'est pas constante, cette accélération centripète existe aussi. En effet, on vérifie facilement que la démonstration qui a permis d'obtenir l'horaire ci-dessus reste valable dans ce cas. L'accélération centripète est due à une *variation de l'orientation* du vecteur vitesse au cours du temps et non à une variation de sa norme.

Cependant, dans le cas d'un MCUA, nous allons montrer qu'à cette accélération centripète, s'ajoute une accélération tangentielle due à une variation de la norme du vecteur vitesse au cours du temps.

L'accélération tangentielle

Dans un MCUA, l'accélération angulaire est constante et est donc égale à son accélération moyenne qui par définition vaut $\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \equiv \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t}$. En exprimant la vitesse angulaire en fonction de la vitesse linéaire par la relation $\omega = \frac{v}{r}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \frac{\frac{v_2}{r} - \frac{v_1}{r}}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{r}\frac{v_2 - v_1}{\Delta t} \\ &\equiv \frac{1}{r}\underbrace{\frac{\Delta v}{\Delta t}}_{a_{T_m}} \end{aligned}$$

où le terme $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ ci-dessus est une accélération due à la *variation de la norme* du vecteur vitesse au cours du temps. Le vecteur vitesse étant toujours tangent à la trajectoire, il en va de même pour la direction de cette accélération, raison pour laquelle on l'appelle **accélération tangentielle** moyenne, que l'on note a_{T_m}. On peut ainsi écrire :

$$\alpha_m = \frac{1}{r} a_{T_m}$$

L'accélération angulaire moyenne α_m est égale à l'accélération angulaire instantanée α (celle-ci étant supposée constante dans un MCUA). D'après l'équation ci-dessus, il en va de même pour les accélérations tangentielles moyenne et instantanée. L'équation ci-dessus reste donc valable pour les accélérations instantanées :

$$\alpha = \frac{1}{r} a_T$$

ou encore :

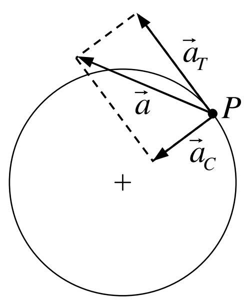
$$a_T = r\alpha$$

On reconnaît la même relation de proportionnalité valable pour les deux autres variables angulaires que sont la position angulaire (ou orientation) θ et la vitesse angulaire ω. Ci-dessous sont récapitulées les relations entre les grandeurs cinématiques linéaires et angulaires du mouvement circulaire :

$$\begin{aligned} l &= r\theta \\ v &= r\omega \\ a_T &= r\alpha \end{aligned}$$

Le vecteur accélération dans un MCUA

D'après ce qui précède, le vecteur accélération dans un MCUA est la somme du vecteur accélération centripète $\vec{a}_C$ (dirigé vers le centre de la trajectoire circulaire) et de l'accélération tangentielle $\vec{a}_T$ (tangent à la trajectoire) (c.f. fig. ci-contre) :



$$\vec{a} = \vec{a}_C + \vec{a}_T$$

On voit sur la figure ci-contre que l'on obtient par le théorème de Pythagore, la norme du vecteur $\vec{a}$ en fonction de celles des vecteur $\vec{a}_C$ et $\vec{a}_T$:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_C^2 + a_T^2} \\ &= \sqrt{\left(r\omega^2\right)^2 + (r\alpha)^2} \\ &= r\sqrt{\omega^4 + \alpha^2} \end{aligned}$$

De plus, l'orientation θ_a du vecteur $\vec{a}$ est égale à l'orientation du vecteur $\vec{a}_T$ (qui est égale à l'orientation θ_v du vecteur vitesse) à laquelle il faut ajouter l'angle (aigu) φ formé par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{a}_T$:

$$\begin{aligned}\theta_a &= \theta_v + \varphi \\ &= \omega t + \pi/2 + \varphi\end{aligned}$$

où

$$\varphi = \arctan\left(\frac{a_C}{a_T}\right)$$

On obtient finalement :

$$\theta_a = \omega t + \arctan\left(\frac{a_C}{a_T}\right) + \pi/2$$

Les coordonnées polaires du vecteur accélération dans un MCUA sont donc données par :

$$\begin{aligned}a &= r\sqrt{\omega^4 + \alpha^2} \\ \theta_a &= \omega t + \arctan\left(\frac{a_C}{a_T}\right) + \pi/2\end{aligned}$$

Horaires des variables angulaires θ, ω et α

Rappelons que dans un MRUA, les horaires du déplacement Δx, de la vitesse v et de l'accélération a, sont donnés par :

$$\begin{aligned}&\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ &v = v_0 + at \\ &a = cte\end{aligned}$$

Ces horaires restent valables pour les grandeurs cinématiques tangentielles (l, v et a_T) dans le cas d'un mouvement curviligne :

$$\begin{aligned}&l = v_0 t + \frac{1}{2} a_T t^2 \\ &v = v_0 + a_T t \\ &a_T = cte\end{aligned}$$

En substituant dans ces équations, les relations trouvées précédemment :

$$l = r\theta$$
$$v = r\omega$$
$$a_T = r\alpha$$

on obtient :

$$\theta = \theta_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$
$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$
$$\alpha = cte$$

où le sens dans lequel θ est positif, est le même que celui où ω et α sont positifs.

Les dernières équations ci-dessus sont l'analogue pour les variables angulaires du MCUA, des équations horaires du MRUA.

Remarques

Les différentes relations obtenues dans ce chapitre montrent que dans un MCUA :

- La norme de l'accélération centripète $\vec{a}_C$ dépend du temps.
- La norme de l'accélération tangentielle $\vec{a}_T$ est constante.
- La norme de l'accélération $\vec{a} = \vec{a}_C + \vec{a}_T$ dépend du temps.
- Les orientations de ces trois vecteurs dépendent du temps.