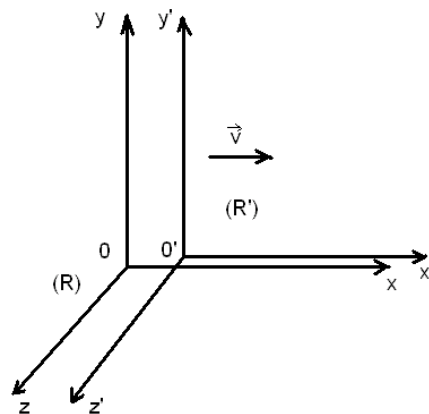


## Relativité restreinte et diagrammes d'espace-temps

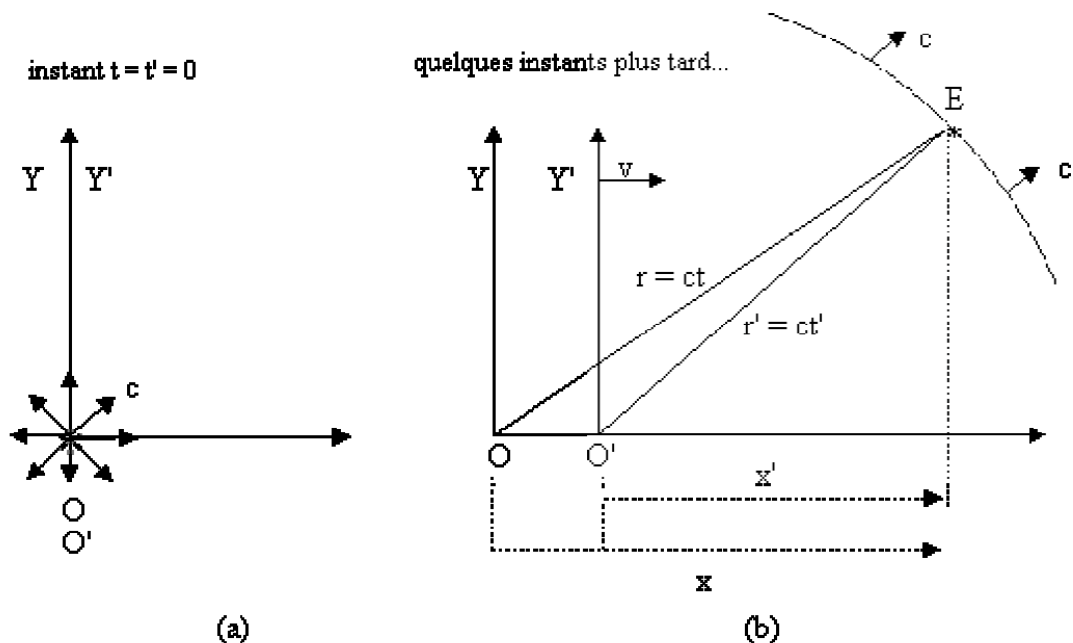
Par Pascal Rebetez

### Invariance de l'intervalle

Soient  $R$  et  $R'$ , deux référentiels inertiels,  $R'$  se déplaçant avec une vitesse  $\vec{v}$  le long de l'axe des  $x$  par rapport à  $R$ . Imaginons deux horloges pour mesurer le temps ( $t$  dans  $R$  et  $t'$  dans  $R'$ ). Supposons que lorsque l'origine  $O'$  coïncide avec  $O$ , les horloges se synchronisent et indiquent  $t = t' = 0$ .



Enfin, à cet instant  $t = t' = 0$ , imaginons qu'un éclair de lumière soit émis dans toutes les directions comme l'indique le schéma de la figure (a) ci-dessous.



Quelques instants plus tard, le front de lumière émise se trouve à une distance  $r = ct$  autour de l'origine  $O$  dans toutes les directions (Fig. (b)),  $r$  étant le rayon de la sphère de lumière autour de  $O$ . Mais d'après le 2<sup>ème</sup> postulat de la relativité restreinte, il faut que le front de lumière

émise se retrouve aussi à une distance  $r' = ct'$  autour de l'origine  $O'$  puisque la lumière doit s'éloigner à la même vitesse dans toutes les directions, quel que soit le référentiel. De ce schéma, on obtient les équations suivantes pour le référentiel  $R$  :

$$\left. \begin{array}{l} r = ct \\ r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow (ct)^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

De même, pour le référentiel  $R'$  :

$$\left. \begin{array}{l} r' = ct' \\ (r')^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow (ct')^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2$$

Considérant que  $y' = y$  et  $z' = z$ , on obtient la relation très importante :

$$\boxed{(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - (x')^2}$$

L'expression  $(ct)^2 - x^2$  est appelée **intervalle** (à la puissance 2, entre un événement  $E$  de coordonnées  $(x, ct)$  et l'origine  $O$  de coordonnées  $(0, 0)$  d'un référentiel  $R$  dans l'espace-temps.

*L'intervalle entre un événement et l'origine d'un référentiel  $R$  est un invariant, il a la même valeur dans tout autre référentiel inertiel  $R'$  en mouvement uniforme par rapport au référentiel  $R$ .*

En associant le symbole  $s$  à l'intervalle, celui-ci s'exprime par :

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 \Leftrightarrow s = \sqrt{(ct)^2 - x^2}$$

et son invariance par :

$$s^2 = (s')^2 \Leftrightarrow s = s'$$

### Construction du diagramme d'espace-temps de Loedel

De l'invariance de l'intervalle :

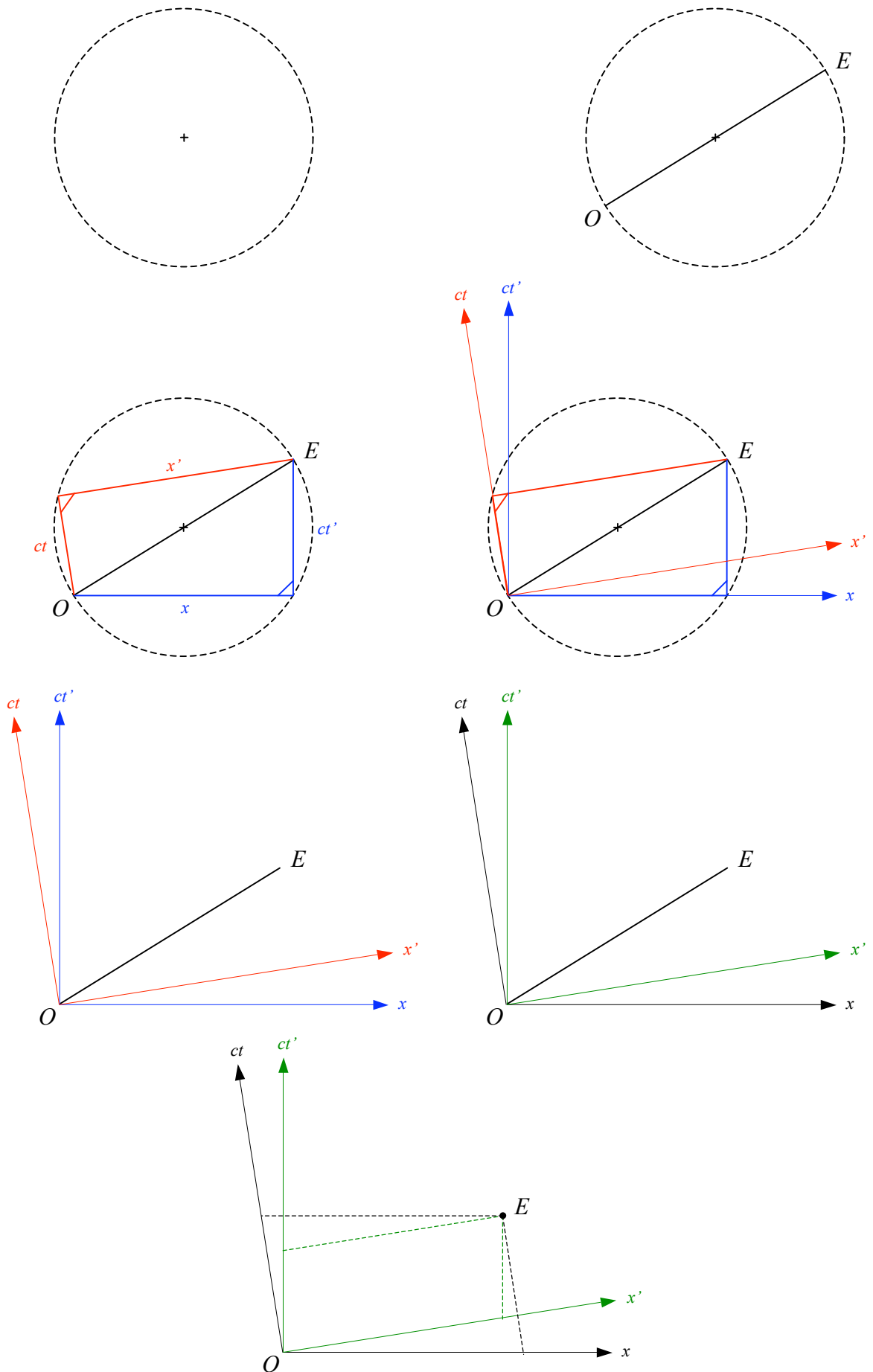
$$(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - (x')^2$$

il découle :

$$(ct)^2 + (x')^2 = (ct')^2 + x^2$$

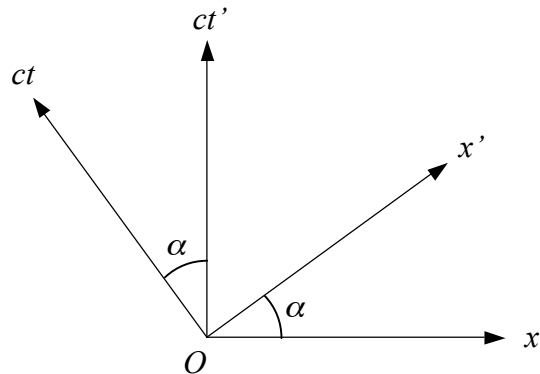
Cette dernière égalité,  $(ct)^2 + (x')^2 = (ct')^2 + x^2$ , rappelle le théorème de Pythagore et permet de construire deux diagrammes d'espace-temps  $(O, x, ct)$  et  $(O', x', ct')$  qui respectent l'invariance de l'intervalle dans les deux référentiels en mouvement relatif uniforme  $R$  et  $R'$ . Ces diagrammes sont appelés **diagrammes de Loedel** et leur construction est expliquée par les figures de la page suivante.

### Marche à suivre pour la construction du diagramme de Loedel



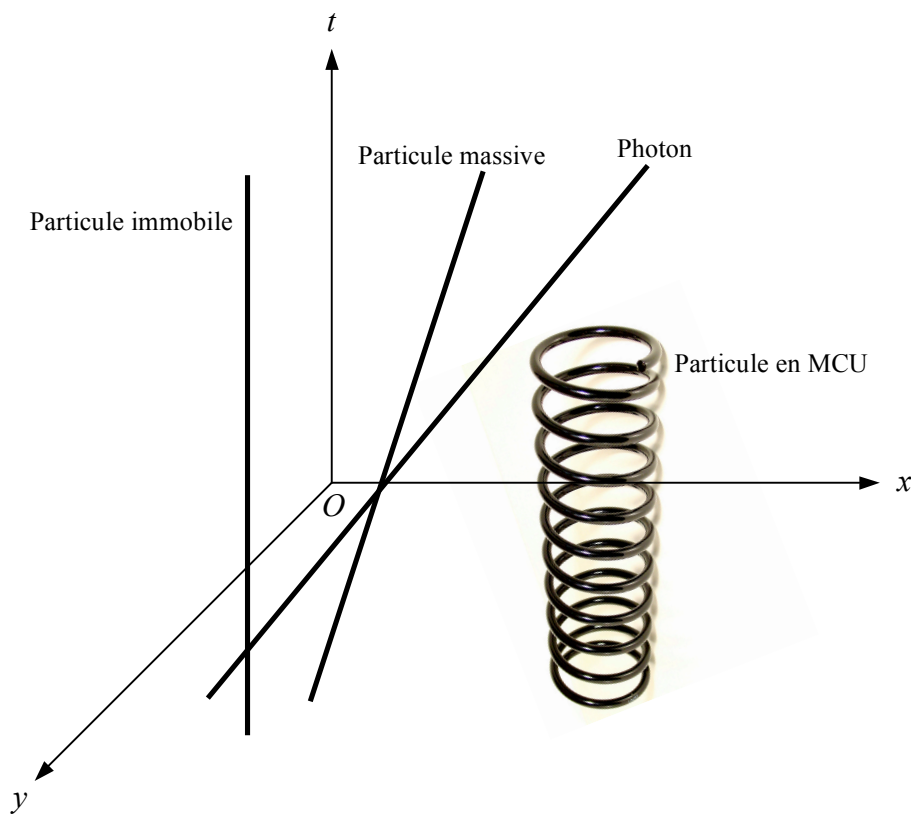
### Angle entre les axes de coordonnées dans un diagramme de Loedel

Nous avons vu comment construire un diagramme de Loedel, mais il reste encore à connaître la valeur de l'angle  $\alpha$  formé par les axes  $ct$  et  $ct'$  (qui par construction, est le même que celui formé par les axes  $x$  et  $x'$ ) :



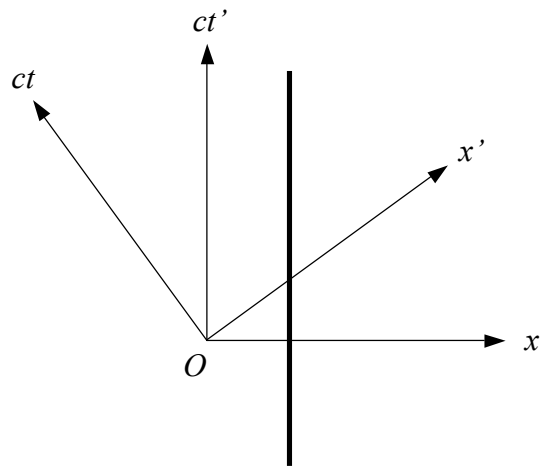
Nous allons montrer dans ce qui suit, que cet angle  $\alpha$  dépend de la vitesse relative  $v$  des deux référentiels  $R$  et  $R'$ .

**Définition :** On appelle **ligne d'univers** d'une particule, l'ensemble des événements occupés successivement dans l'espace-temps par cette particule.

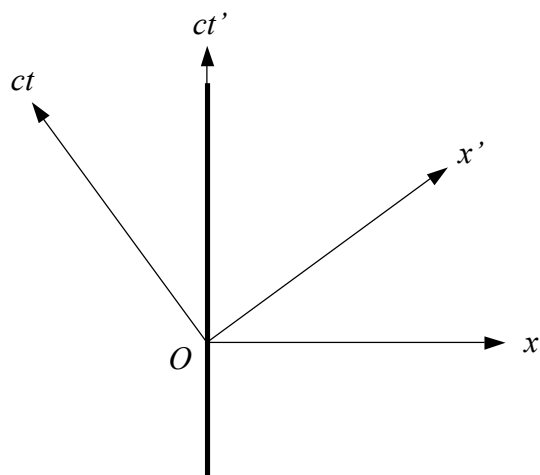


- La ligne d'univers d'une particule se déplaçant à vitesse constante est une droite.
- La ligne d'univers d'une particule immobile est une droite colinéaire à l'axe du temps.
- La ligne d'univers d'un photon (se déplaçant à la vitesse constante  $c$ ) est une droite. Toute particule massive a une vitesse inférieure à  $c$  (nous démontrerons cette affirmation ultérieurement) et par conséquent, une ligne d'univers dont la pente (dans un diagramme d'espace-temps) est supérieure à celle d'un photon.
- La ligne d'univers d'une particule dont la vitesse varie est une courbe.  
Exemple : la ligne d'univers d'une particule en mouvement circulaire uniforme dans le plan  $(x,y)$ , est une hélice circulaire (dans un diagramme d'espace-temps orthogonal).

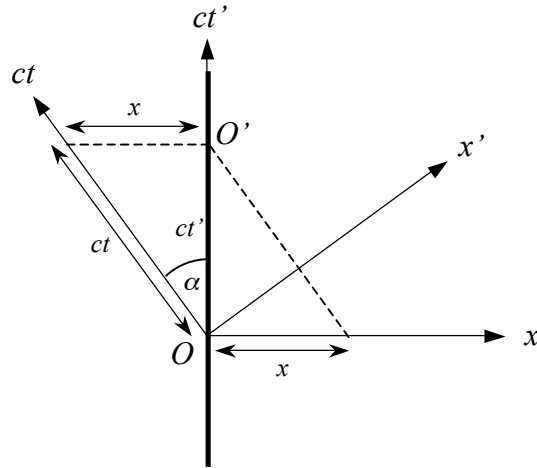
Dans un diagramme de Loedel, un point immobile dans le référentiel  $R'$  a une ligne d'univers parallèle à l'axe temporel  $ct'$  :



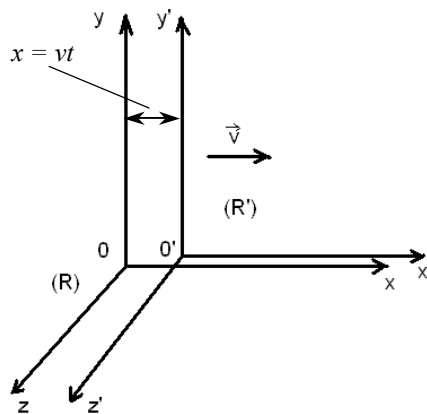
En particulier, si ce point immobile se trouve à l'origine  $O'$  du référentiel  $R'$ , sa ligne d'univers est confondue avec l'axe temporel  $ct'$  :



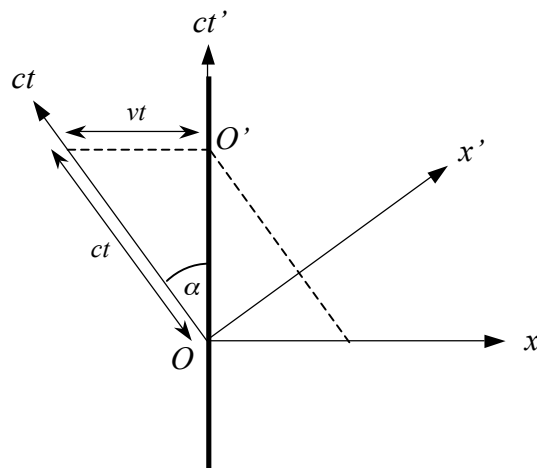
Cette ligne d'univers est donc celle de l'origine  $O'$  du référentiel  $R'$ . Considérons un point particulier de cette ligne d'univers, de coordonnée  $(0,ct')$  dans  $R'$  et représentons les coordonnées  $(x,ct)$  de cet événement dans le référentiel  $R$  :



Sur ce diagramme,  $x$  est la position (la coordonnée spatiale) et  $ct$  l'instant (la coordonnée temporelle) dans le référentiel  $R$ , de l'origine  $O'$  du référentiel  $R'$ . Or, puisque par hypothèse, les deux référentiels sont en mouvement relatif uniforme à vitesse  $v$ , cela signifie que l'origine  $O'$  du référentiel  $R'$  se déplace à la vitesse  $v$  par rapport au référentiel  $R$ . Par conséquent,  $x = vt$  (Fig. ci-dessous).



On peut redessiner le dernier diagramme de Loedel en tenant compte de ce résultat :



On voit sur cette figure la relation entre l'angle  $\alpha$  et la vitesse  $v$  :

$$\sin \alpha = \frac{vt}{ct}$$

d'où :

$$\boxed{\sin \alpha = \frac{v}{c}}$$

On en déduit immédiatement que  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ .

### Résumé

Nous venons de montrer, que du deuxième postulat de la relativité restreinte (invariance de la vitesse de la lumière dans le vide), découle l'*invariance de l'intervalle* (entre un événement  $E$  dans l'espace-temps et l'origine d'un référentiel inertiel, ou encore entre deux événements  $E_1$  et  $E_2$  de l'espace-temps). Si les coordonnées de l'événement  $E$  dans l'espace-temps sont  $(x, ct)$  dans un référentiel  $R$ , l'intervalle entre cet événement et l'origine du référentiel est défini par :

$$(ct)^2 - x^2$$

De même, si les coordonnées de deux événements  $E_1$  et  $E_2$  dans l'espace-temps sont  $(x_1, ct_1)$  respectivement  $(x_2, ct_2)$  dans un référentiel  $R$ , l'intervalle entre ces deux événements est défini par :

$$(c(t_2 - t_1))^2 - (x_2 - x_1)^2$$

ou encore :

$$(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

De manière générale, si deux événements  $E_1$  et  $E_2$  dans l'espace-temps, dont les coordonnées dans les référentiels  $R$  et  $R'$  en mouvement relatif uniforme *dans une direction quelconque*, sont  $(x_1, y_1, z_1, ct_1)$  et  $(x_2, y_2, z_2, ct_2)$  respectivement  $(x'_1, y'_1, z'_1, ct'_1)$  et  $(x'_2, y'_2, z'_2, ct'_2)$ , l'invariance de l'intervalle entre  $E_1$  et  $E_2$  s'exprime par :

$$(c\Delta t)^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) = (c\Delta t')^2 - (\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2)$$

c'est-à-dire que l'intervalle entre les événements  $E_1$  et  $E_2$  a la même valeur dans les deux référentiels  $R$  et  $R'$ .

L'*intervalle* entre deux événements de l'espace-temps à 4 dimensions rappelle la *distance* entre deux *positions* de l'espace à 3 dimensions avec cependant deux différences importantes ; contrairement à la distance, l'intervalle contient un signe négatif et un facteur  $c$ .

Un *diagramme de Loedel* représente sur une même figure, les axes des coordonnées spatiales et temporelles de deux référentiel  $R$  et  $R'$  en mouvement relatif uniforme. L'intérêt majeur de ce diagramme est qu'il bénéficie de la propriété très commode d'avoir des échelles identiques pour les axes de coordonnées des référentiels  $R$  et  $R'$ , ce qui facilite l'interprétation des figures.

De plus, il traite symétriquement les deux référentiels  $R$  et  $R'$  ; il est inutile de préciser lequel des deux est le référentiel en mouvement par rapport à l'autre, ce qui assure la réciprocité des observations entre les deux référentiels. Ce fait traduit parfaitement l'esprit du principe de relativité qui stipule qu'aucun référentiel inertiel n'est privilégié.

Un tel diagramme respecte l'invariance de l'intervalle.

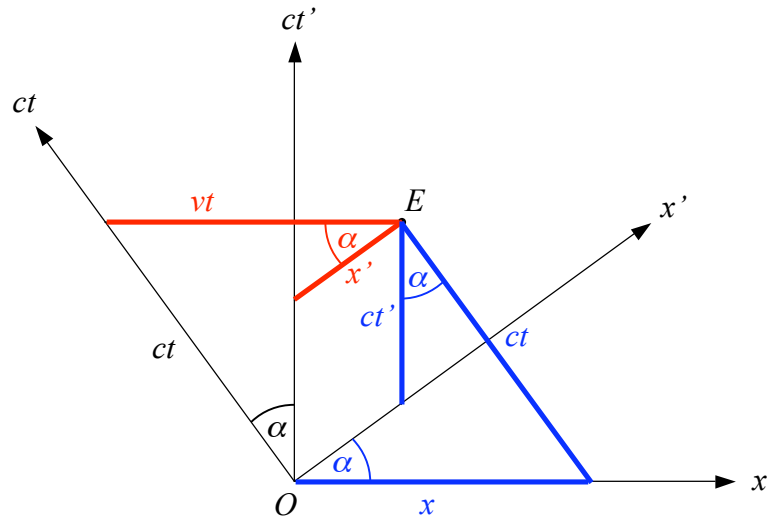
L'angle formé par les axes des deux référentiels, dépend de la vitesse relative de ces derniers. Nous montrerons comment déduire à l'aide d'un diagramme de Loedel, de manière purement géométrique, avec élégance et une grande économie de calculs, les conséquences cinématiques de la relativité restreinte, à savoir :

- la relativité de la simultanéité
- la dilatation des durées
- la contraction des longueurs
- la transformation de Lorentz
- la composition relativiste des vitesses

et la réciprocité de ces phénomènes entre les deux référentiels  $R$  et  $R'$  en mouvement relatif uniforme.



## La transformation de Lorentz



Préalablement, exprimons  $\cos\alpha$  en fonction du facteur  $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$  apparaissant dans la transformation Lorentz. De l'identité trigonométrique  $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ , on en déduit  $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$ . Rappelons que dans le diagramme de Loedel  $\sin\alpha = \frac{v}{c}$ , ce qui permet d'écrire  $\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{1}{\gamma}$ . On utilisera dans la suite cette dernière expression :  $\cos\alpha = \frac{1}{\gamma}$ .

- **Coordonnée spatiale**

$$x = vt + x' \cos\alpha$$

$$x' = \frac{x - vt}{\cos\alpha} = \gamma(x - vt)$$

$$\boxed{x' = \gamma(x - vt)}$$

- **Coordonnée temporelle**

$$ct = x \sin\alpha + ct' \cos\alpha$$

$$t' = \frac{t - x \frac{\sin\alpha}{c}}{\cos\alpha} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$\boxed{t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)}$$

Remarques :

- Si  $v \ll c$  alors le facteur  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \approx 1$  et la transformation de Lorentz se réduit à la transformation de Galilée, qui demeure ainsi valable pour de faibles vitesses.
- Lorsque  $v$  tend vers  $c$ , le facteur  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$  tend vers l'infini (car le terme sous la racine tend vers 0). De plus, si  $v$  est supérieur à  $c$ , ce facteur a une valeur non réelle (car le terme sous la racine est négatif). Il en résulte que dans la théorie de la relativité restreinte, la vitesse  $c$  joue le rôle d'une *vitesse limite*, qui ne peut être dépassée.
- La coordonnée temporelle  $t'$  mesurée dans le référentiel  $R'$  dépend à la fois des coordonnées temporelles  $t$  et spatiale  $x$  mesurées dans le référentiel  $R$ . L'espace et le temps sont ainsi inséparables et forment une entité appelée **espace-temps**. On peut noter les coordonnées d'un événement dans l'espace-temps de la manière suivante :

$$x_1 = x$$

$$x_2 = y$$

$$x_3 = z$$

$$x_4 = ct$$

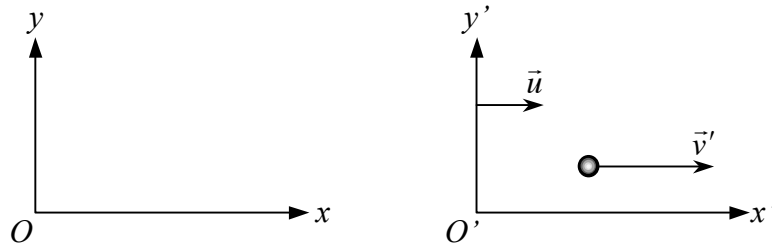
La quatrième coordonnée  $x_4$ , la coordonnée temporelle, est multipliée par une constante, la vitesse de la lumière dans le vide. Cette coordonnée temporelle ainsi définie (définition utilisée dans le diagramme de Loedel) a donc, comme les trois coordonnées spatiales  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ , l'unité d'une longueur. Avec la définition  $\beta \equiv \frac{v}{c}$ , la transformation de Lorentz devient :

$$\begin{cases} x'_1 = \gamma(x_1 - \beta x_4) \\ x'_4 = \gamma(x_4 - \beta x_1) \end{cases}$$

Ces équations illustrent la symétrie de la transformation de Lorentz dans l'espace-temps. Comme la coordonnée temporelle  $x_4$  a le même statut que les coordonnées spatiales  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ , on l'appelle parfois la **quatrième dimension**.

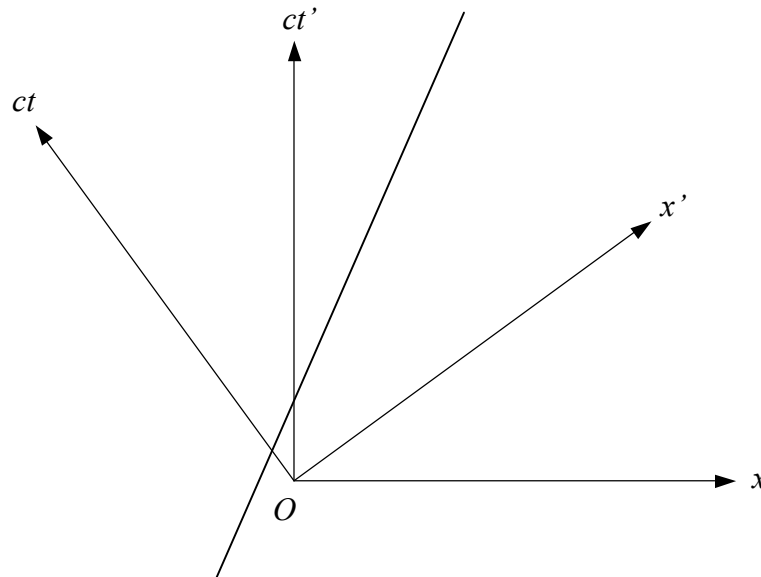
### La composition relativiste des vitesses

Supposons qu'une particule ait une vitesse  $\vec{v}'$  par rapport à un référentiel  $R'$  qui est lui-même en mouvement uniforme à la vitesse  $\vec{u}$  par rapport à un référentiel inertiel  $R$ , comme indiqué sur la figure ci-dessous.

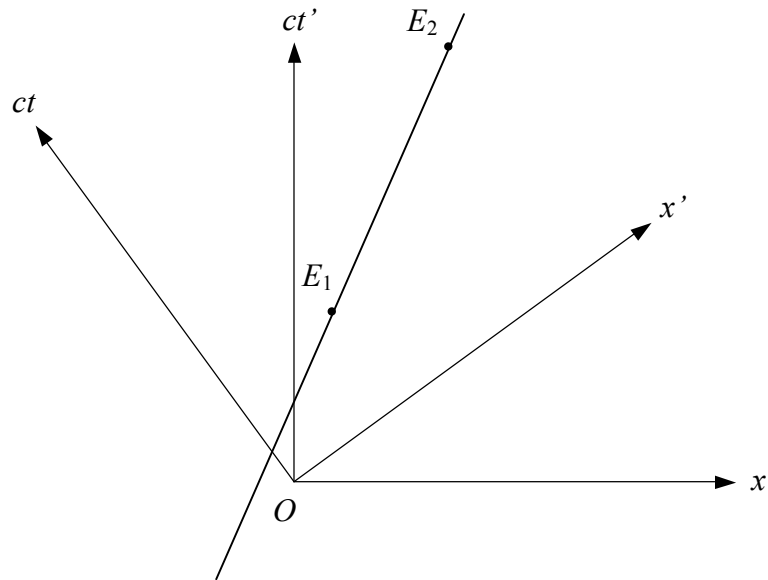


Nous cherchons la vitesse  $\vec{v}$  de la particule par rapport au référentiel  $R$ . En physique classique, il découle de la transformation de Galilée que  $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$ . Nous verrons que ce résultat n'est plus valable dans le cadre de la relativité restreinte. À l'aide du diagramme de Loedel, nous cherchons dans ce qui suit, l'expression relativiste de  $\vec{v}$ .

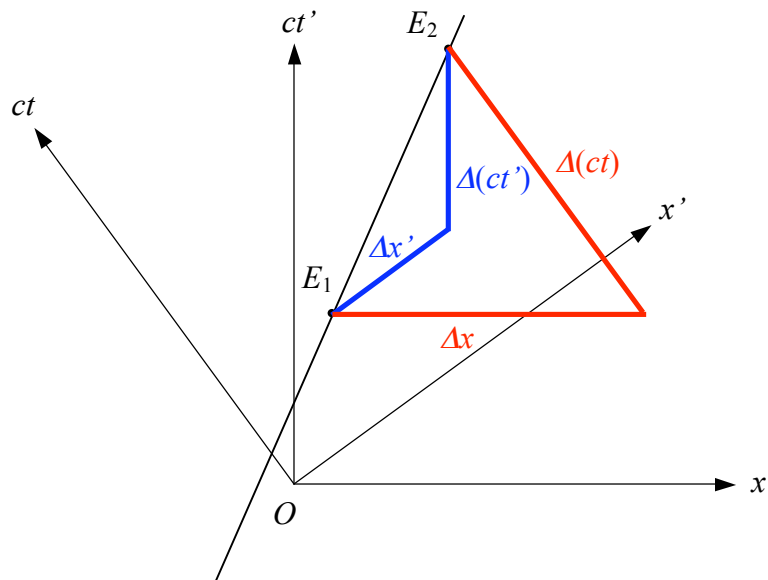
La ligne d'univers d'une particule se déplaçant à vitesse constante est une droite dans un diagramme d'espace-temps :



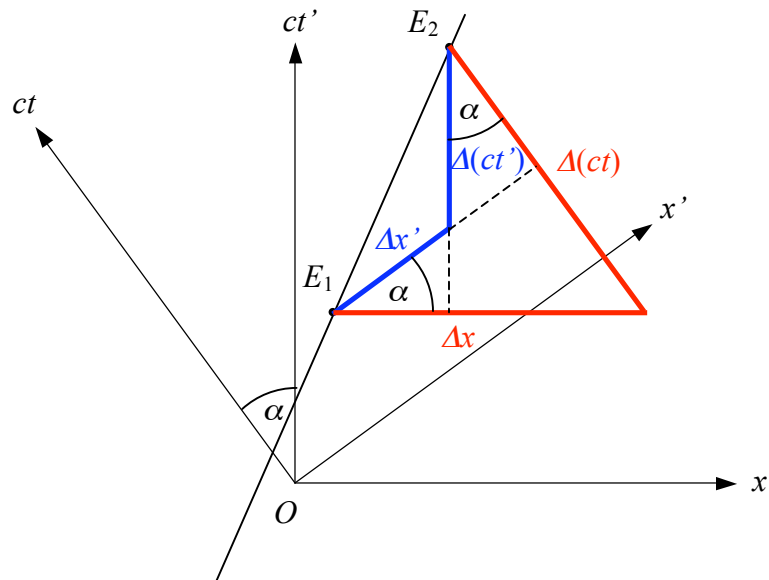
Sur cette ligne d'univers, considérons deux événements  $E_1$  et  $E_2$ , représentant la position de la particule à deux instants différents.



Représentons sur ce diagramme l'intervalle spatial et l'intervalle temporel entre ces deux événements, dans les référentiels  $R$  et  $R'$  :



Ajoutons sur cette figure l'angle  $\alpha$  ainsi que deux segments qui nous permettront de faire apparaître des triangles semblables :



Sur la figure ci-dessus, nous constatons que le triangle rectangle de sommet  $E_1$  et d'hypoténuse  $\Delta x$ , est semblable au triangle rectangle de sommet  $E_2$  et d'hypoténuse  $\Delta ct$ . Par conséquent, le rapport des hypoténuses de ces deux triangles est égal au rapport de leur cathète adjacente à l'angle  $\alpha$ , ce qui permet d'écrire :

$$\frac{\Delta x}{\Delta(ct)} = \frac{\Delta x' + \Delta(ct') \sin \alpha}{\Delta(ct') + \Delta x' \sin \alpha}$$

Le premier membre de cette équation peut s'exprimer comme :

$$\frac{\Delta x}{\Delta(ct)} = \frac{\Delta x}{c \Delta t} = \frac{1}{c} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{c} v$$

De même :

$$\frac{\Delta x}{\Delta(ct')} = \frac{1}{c} v'$$

De plus, on rappelle que dans un diagramme de Loedel :

$$\sin \alpha = \frac{u}{c}$$

En divisant le numérateur et le dénominateur du membre de droit de l'équation initiale par  $\Delta(ct')$  puis en y substituant les trois expressions précédentes et en multipliant finalement l'équation obtenue par  $c$ , on trouve :

$$\boxed{v = \frac{v' + u}{1 + \frac{v'u}{c^2}}}$$

Remarques :

- On voit immédiatement que si la vitesse  $v'$  de la particule par rapport au référentiel  $R'$  et la vitesse relative  $u$  des deux référentiels  $R$  et  $R'$ , sont toutes deux beaucoup plus petite que  $c$ , alors l'expression relativiste obtenue ci-dessus se réduit au résultat classique  $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$ .
- Si la particule est un photon (de la lumière), alors sa vitesse par rapport au référentiel  $R'$  est  $v' = c$ . En substituant cette expression dans la formule relativiste de composition des vitesses, on obtient :

$$v = \frac{c + u}{1 + \frac{cu}{c^2}} = c$$

Conformément au deuxième postulat de la relativité restreinte, la vitesse de la lumière est la même dans l'autre référentiel d'inertie  $R$ .