Balistique

Introduction

La balistique est l'étude du mouvement des mobiles soumis à la force gravitationnelle. Galilée (1564-1642) a été le premier à décrire de façon adéquate le mouvement des projectiles et à démontrer qu'il était possible de le comprendre en analysant ses composantes horizontale et verticale séparément. Il s'agissait d'une approche innovatrice dont personne n'avait eu l'idée avant lui.

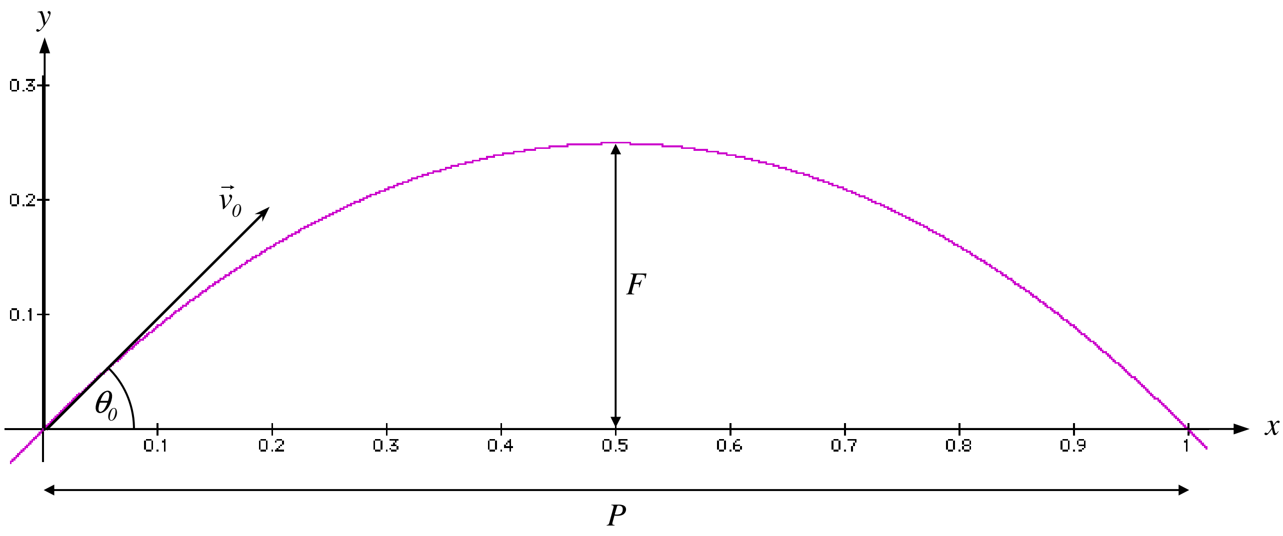
Hypothèses

Nous étudions dans ce qui suit, le mouvement d'un projectile lancé à une vitesse initiale de norme v_0 et d'orientation θ_0 mesurée par rapport au sol supposé horizontal (perpendiculaire à la direction du vecteur accélération gravitationnelle $\vec{g}$). Nous limitons cette étude aux cas où :

- l'unique force à laquelle est soumis le projectile est sa force de pesanteur
- l'accélération gravitationnelle $\vec{g}$ est constante (en norme et en orientation) dans la région où se déplace le projectile.

Choix du repère

On choisit un repère cartésien dont l'axe y a la même direction que celle du vecteur accélération gravitationnelle $\vec{g}$ (la verticale) et dont le sens (vers le haut) est opposé à celui de ce vecteur. On place l'origine du repère à la position initiale du projectile (c.f. fig. ci-dessous).



$\vec{v}_0$: vecteur vitesse initiale
θ_0 : angle de tir
F : flèche de la trajectoire
P : portée de la trajectoire

Horaire

Horizontalement, le mouvement du projectile est un MRU dont l'horaire est donné par :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= v_{x_0}\, t \\ &= v_0 \cos\theta_0\, t \end{aligned}} \qquad (1)$$

Verticalement, le mouvement du projectile est un MRUA dont l'horaire est donné par :

$$\boxed{\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} a_{y_0} t^2 + v_{y_0} t \\ &= -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\theta_0\, t \end{aligned}} \qquad (2)$$

Le mouvement d'un projectile a lieu dans le plan déterminé par son vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ et le vecteur accélération gravitationnelle $\vec{g}$. Ce mouvement peut être envisagé comme la combinaison de *deux mouvements indépendants*, l'un horizontal et à vitesse constante $v_{x_0} = v_0 \cos\theta_0$ (la composante horizontale du vecteur vitesse initiale) et l'autre, vertical qui n'est autre que celui d'une chute libre.

Équation de la trajectoire

En éliminant la variable *t* des deux équations précédentes, on exprime la trajectoire du projectile à savoir sa position verticale *y* en fonction de sa position horizontale *x* :

$$\boxed{\begin{aligned} y &= -\frac{g}{2 v_{x_0}^2} x^2 + \frac{v_{y_0}}{v_{x_0}} x \\ &= -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta_0} x^2 + \tan\theta_0\, x \end{aligned}} \qquad (3)$$

C'est une équation du $2^{ème}$ degré en *x*, c'est-à-dire *l'équation d'une parabole*.

Temps de vol

On appelle **temps de vol** (noté t_V), le temps que met le projectile pour retomber sur le sol après avoir été lancé (ou pour atteindre la même altitude que celle de sa position initiale, dans le cas où ses positions initiale et finale ne sont pas à la même altitude).

On cherche l'instant *t* satisfaisant :

$$y = 0$$

Ce qui d'après l'équation (2) donne :

$$-\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\theta_0 t = 0$$

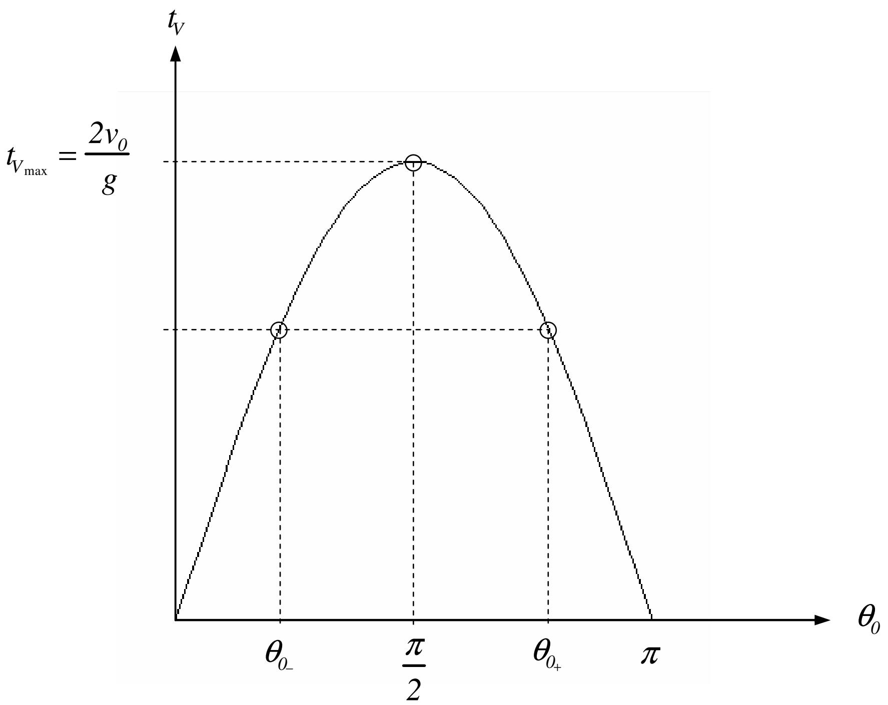
En mettant *t* en évidence, on résout facilement cette équation du 2ème degré et l'on obtient les deux solutions :

$$\begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = \dfrac{2v_0 \sin\theta_0}{g} \end{cases}$$

La 1ère solution correspond à l'instant où le projectile est lancé et la 2ème solution, à l'instant où il retombe sur le sol. C'est donc celle-ci qui nous intéresse :

$$\boxed{t_V = \frac{2v_0 \sin\theta_0}{g}} \qquad (4)$$

On voit que le temps de vol t_V est une fonction sinusoïdale de l'angle de tir θ_0 et il est intéressant de représenter graphiquement t_V en fonction de θ_0 :



Sur le graphique ci-dessus, nous constatons que :

- Le temps de vol est maximal pour un angle de tir $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$ rad = 90° et vaut $t_{V_{\max}} = \dfrac{2v_0}{g}$.
- Pour un temps de vol t_V inférieur à $t_{V_{\max}}$, il correspond deux angle de tir θ_{0-} et θ_{0+} qui satisfont l'équation $\theta_{0-} + \theta_{0+} = \pi$ rad = 180°. Nous comprendrons la signification physique de ces deux angles de tir en étudiant la flèche.

Portée

On appelle **portée** (notée *P*), la distance horizontale parcourue par le projectile entre le moment où il est lancé et celui où il retombe sur le sol (ou le moment où il atteint la même altitude que celle de sa position initiale, dans le cas où l'altitude de sa position finale est inférieure à celle de sa position initiale).

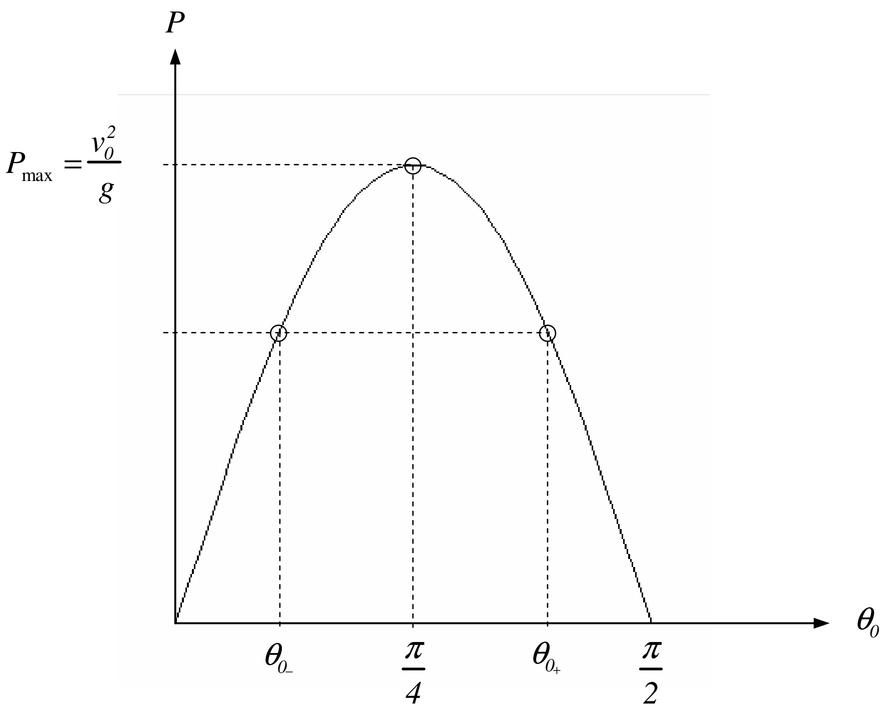
On s'intéresse ici uniquement au mouvement horizontal du projectile et l'on trouve sa portée en insérant son temps de vol dans l'équation (1) :

$$\begin{aligned} P &= x(t_V) \\ &= v_0 \cos\theta_0 \frac{2v_0 \sin\theta_0}{g} \end{aligned}$$

En utilisant l'identité trigonométrique $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, on obtient finalement :

$$\boxed{P = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}} \qquad (5)$$

On voit que la portée *P* est une fonction sinusoïdale de l'angle de tir θ_0 et il est intéressant de représenter graphiquement *P* en fonction de θ_0 :



Sur le graphique ci-dessus, nous constatons que :

- La portée est maximale pour un angle de tir $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ rad = 45° et vaut $P_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$.
- Pour une portée P inférieure à $P_{\max}$, il correspond deux angle de tir θ_{0-} et θ_{0+} (tirs tendu et lobé) qui satisfont l'équation $\theta_{0-} + \theta_{0+} = \frac{\pi}{2}$ rad = 90°. Physiquement, cela signifie qu'un point du sol situé à une distance inférieure à la portée maximale du projectile, *est atteignable par ce dernier par deux angles de tirs différents.*

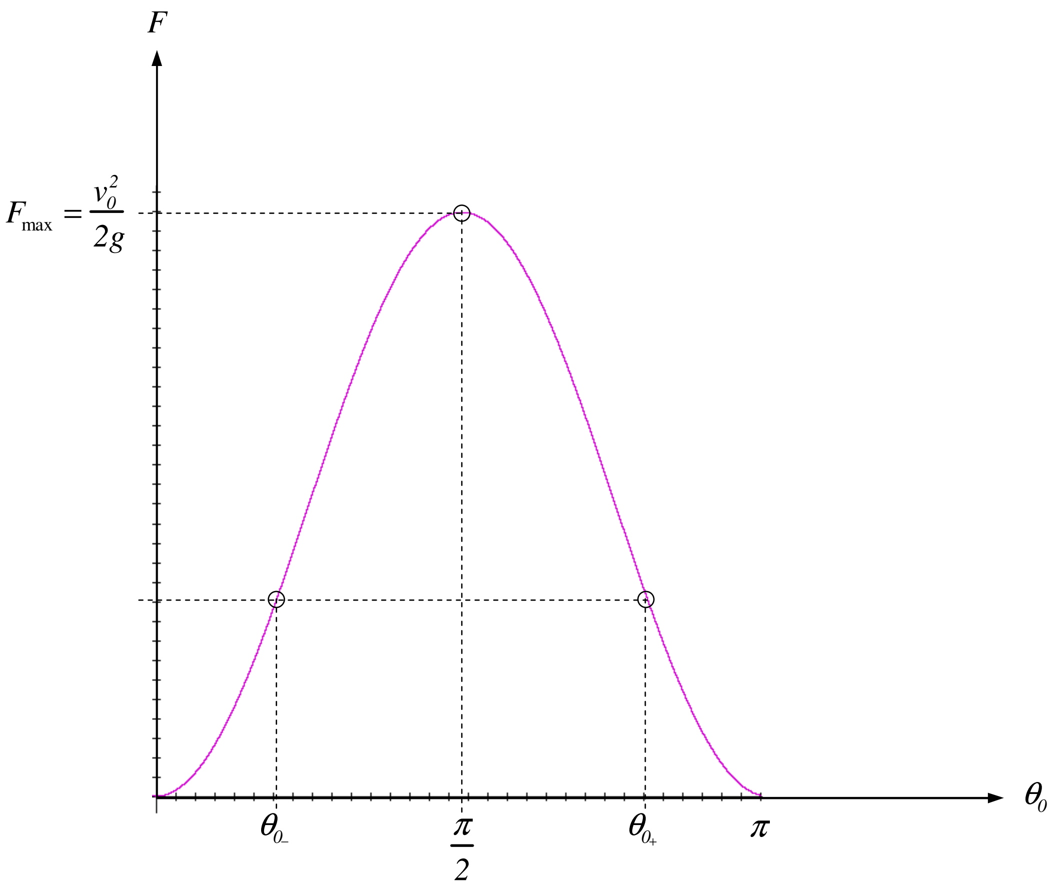
FIGURE

Flèche

On appèle **flèche** (notée F), l'altitude maximale atteinte par le projectile. Par symétrie de la trajectoire, nous savons que le temps que met le projectile pour atteindre son altitude maximale, est la moitié de son temps de vol. On obtient donc la flèche en calculant l'altitude du projectile pour $t = \frac{1}{2} t_V$. En insérant cette expression dans l'équation (2) et après simplifications, on obtient :

$$\boxed{F = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}} \qquad (6)$$

Comme pour la portée, il est intéressant de représenter graphiquement la flèche F en fonction de l'angle de tir θ_0 :



Sur le graphique ci-dessus, nous constatons que :

- La flèche est maximale pour un angle de tir $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$ rad = 90° et vaut $F_{\max} = \dfrac{v_0^2}{2g}$. Dans ce cas, la trajectoire est un segment vertical.
- Pour une flèche F inférieure à $F_{\max}$, il correspond deux angle de tir θ_{0-} et θ_{0+} (tirs à gauche et à droite) qui satisfont l'équation $\theta_{0-} + \theta_{0+} = \pi$ rad = 180°. Physiquement, cela signifie que l'altitude du sommet de la trajectoire atteinte par un projectile tiré vers la droite avec un certain angle de tir, est aussi atteignable en tirant le projectile vers la gauche avec le même angle de tir.
- Ces deux angles de tir pour une même flèche F correspondent aux deux angles de tir pour un même temps de vol t_V, que nous avions obtenus plus haut. Cela signifie que *le temps de vol du tir à gauche est le même que celui du tir à droite*.
- Ces deux derniers résultats n'ont rien de surprenant puisque la trajectoire du tir à gauche est le symétrique par rapport à l'ordonnée y du repère, de la trajectoire du tir à droite.

FIGURE

Relations entre flèche et portée

Pour des angles de tir particuliers

Les résultats obtenus ci-dessus montrent que :

- Pour $\theta_0 = \dfrac{\pi}{4}$:

$$\left.\begin{aligned} P &= P_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \\ F &= \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\frac{\pi}{4} = \frac{v_0^2}{4g} \end{aligned}\right\} \Rightarrow P = P_{\max} = 4F$$ (la portée est égal au quadruple de la flèche).

- Pour $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$:

$$\left.\begin{aligned} P &= 0 \\ F &= F_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ La flèche maximale est obtenue avec un tir vertical.

- On constate de plus que :

$$\boxed{P_{\max} = 2F_{\max}} \qquad (7)$$

Insistons sur le fait que ces relations sont valables quelle que soit la valeur de la norme de la vitesse initiale v_0. Ces résultats sont récapitulés à l'aide de la figure qui suit :

FIGURE

Pour un angle de tir quelconque

Rappelons que :

$$F = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}$$
$$P = \frac{2v_0^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0}{g}$$

Par conséquent :

$$\boxed{\frac{F}{P} = \frac{1}{4}\tan\theta_0} \qquad (8)$$

Insistons sur le fait que cette relation est valable quelle que soit la valeur de la norme de la vitesse initiale v_0. Nous pouvons illustrer ce résultat par la figure qui suit :

FIGURE

Dans le cas particulier où $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$, qui est l'angle de tir correspondant à la portée maximale, on retrouve le résultat déjà obtenu précédemment : $P = 4F$.