Choc élastique en 2 dimensions

Par Pascal Rebetez

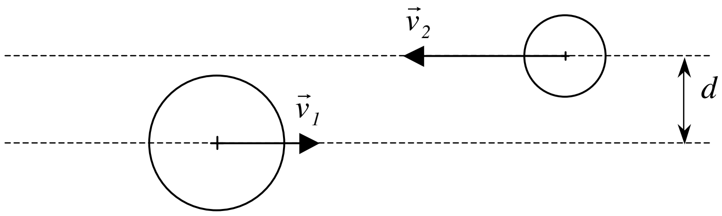
Juillet 2008

1. Introduction

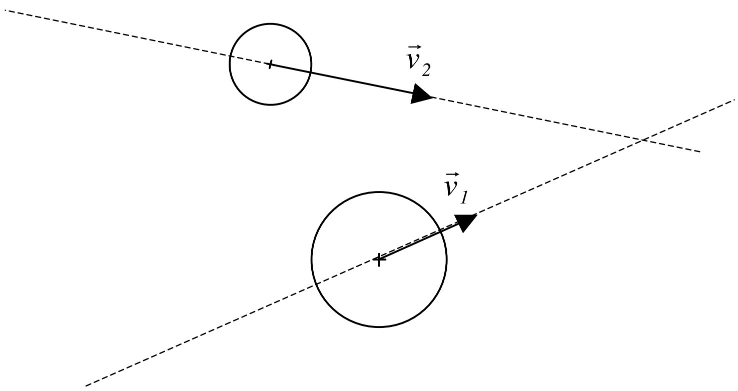
Nous étudions le choc élastique entre deux disques glissant sans frottement sur un plan horizontal. Cette étude est menée dans le cadre de la mécanique classique.
Connaissant la vitesse de chaque disque (en mouvement rectiligne uniforme) avant le choc, nous cherchons leur vitesse après le choc. Le référentiel choisi pour étudier ce problème, est celui du laboratoire.

2. Paramètre d'impact

Considérons dans un premier temps le cas particulier où les vitesses initiales des deux disques sont colinéaires :



Les vitesses finales dépendent de la distance *d* entre les supports des deux vecteurs vitesses initiales. Cette distance est appelée **paramètre d'impact**.
Dans le cas général où les deux vitesses initiales ne sont pas colinéaires, quelle(s) grandeur(s) déterminent le paramètre d'impact ? La figure ci-dessous illustre cette situation :



L'énergie cinétique d'un corps solide (se déplaçant dans un plan) est égale à la somme de l'énergie cinétique de translation de son centre de masse et de l'énergie cinétique de rotation du corps autour d'un axe perpendiculaire au plan et passant par son centre de masse :

$$E_{cin} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

où m est la masse du corps, v la vitesse de son centre de masse, I le moment d'inertie du corps par rapport à un axe perpendiculaire au plan et passant par son centre de masse et ω, la vitesse angulaire du corps autour de ce même axe. De plus, le centre de masse du corps se déplace comme une particule ponctuelle de masse m sur laquelle s'exerce la résultante des forces externes qui s'exercent sur le corps. Le mouvement du centre de masse est donc soumis à la $2^{ème}$ loi de Newton :

$$\vec{F}_r = m\vec{a}$$

où $\vec{F}_r$ est la résultante des forces externes qui s'exercent sur le corps, m la masse du corps et $\vec{a}$, l'accélération du centre de masse du corps. On peut donc considérer le mouvement du corps comme un mouvement de translation du centre de masse, combiné à un mouvement de rotation du corps autour de l'axe sus-mentionné.

Par définition de l'accélération et en vertu de la loi fondamentale de la dynamique, nous pouvons écrire, pour le mouvement du centre (de masse) de chaque disque :

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \Delta\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_{\Delta t_c} \vec{a}(t)dt = \vec{v}_0 + \frac{1}{m}\int_{\Delta t_c} \vec{F}(t)dt$$

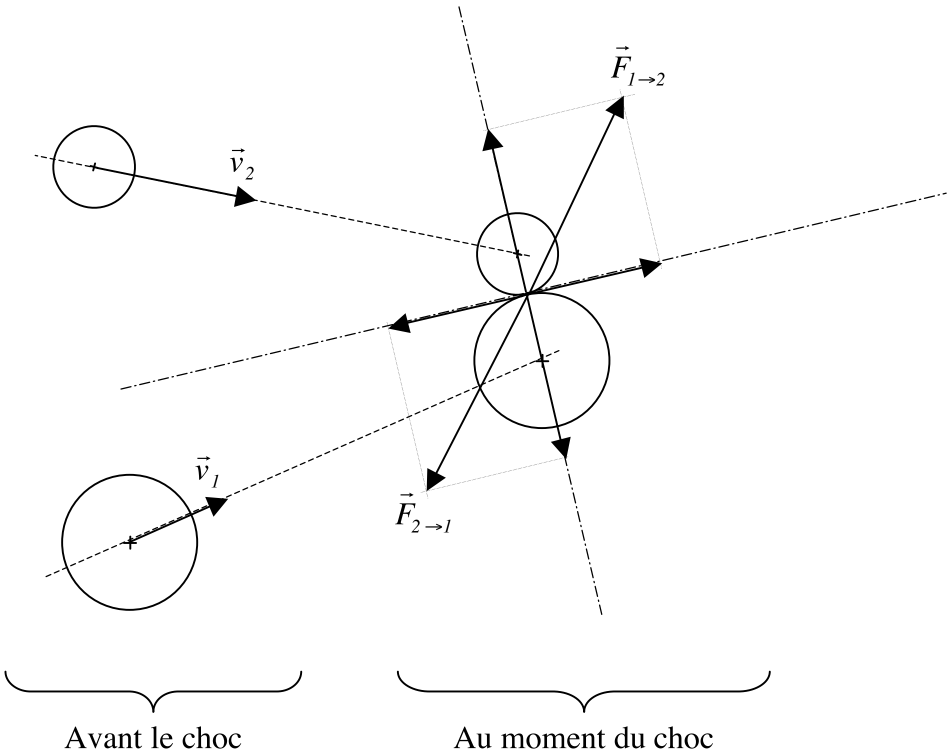
$\vec{v}_0$	: vitesse initiale
$\Delta\vec{v}$	: variation de la vitesse
$\vec{v}$	: vitesse finale
Δt_c	: durée du choc
m	: masse du disque

La relation analogue pour le mouvement de rotation des disques autour de leur centre de masse est :

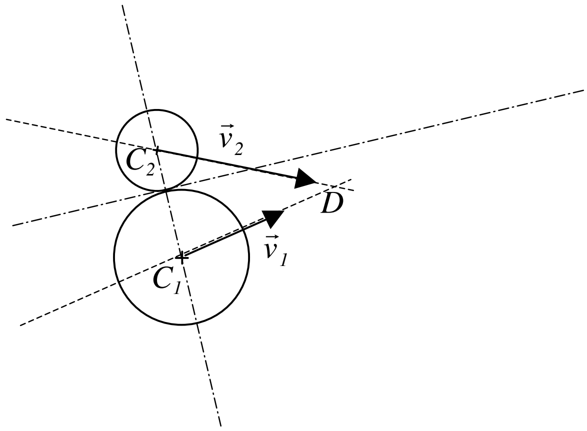
$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \Delta\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \int_{\Delta t_c} \vec{\alpha}(t)dt = \vec{\omega}_0 + \frac{1}{I_{CM}}\int_{\Delta t_c} \vec{\tau}(t)dt = \vec{\omega}_0 + \frac{1}{I_{CM}}\int_{\Delta t_c} \vec{r}(t) \wedge \vec{F}(t)dt$$

$\vec{\omega}_0$	: vitesse angulaire initiale
$\Delta\vec{\omega}$	: variation de la vitesse angulaire
$\vec{\omega}$	: vitesse angulaire finale
$\vec{\alpha}$	: accélération angulaire
Δt_c	: durée du choc
I_{CM}	: moment d'inertie du disque par rapport à une axe qui lui est perpendiculaire et passant par son centre (de masse)
$\vec{\tau}(t)$	: moment de force total exercé sur le disque
$\vec{F}(t)$	: force (supposée unique) exercée sur le disque
$\vec{r}(t)$	: vecteur position du point d'application de la force exercée sur le disque

Ces relations, valables pour chacun des disques, nous montrent que le vecteur vitesse (linéaire et angulaire) finale dépend du vecteur force $\vec{F}(t)$ qu'ils subissent durant le choc. D'après le principe de l'action et de la réaction, les disques subissent pendant le choc des forces opposées, dont le point d'application est au point de contact des deux disques, appelé **point d'impact**. L'équation exprimant l'énergie cinétique d'un corps solide ($E_{cin} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$), suggère de décomposer le vecteur force subi par chaque disque selon deux directions, l'une étant parallèle à la ligne joignant les centres des disques au moment du choc, appelée **ligne d'impact** (et donc normale aux disques) et l'autre, lui étant perpendiculaire (et donc tangente aux disques) comme l'indique la figure ci-dessous :

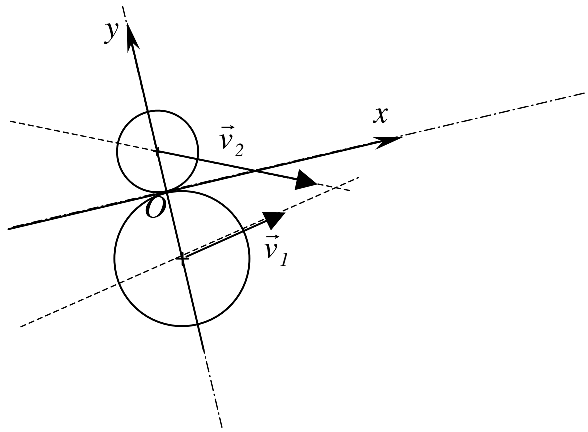


Les deux composantes du vecteur force contribuent à l'accélération (linéaire) du centre de masse pendant le choc alors que seule la composante perpendiculaire à la ligne d'impact, contribue à l'accélération (angulaire) du disque autour de l'axe qui lui est perpendiculaire et passant par son centre (de masse). Par conséquent, *le vecteur vitesse (linéaire et angulaire) finale de chaque disque dépend de l'orientation du vecteur vitesse (linéaire) initiale de son centre de masse, par rapport à la ligne d'impact*. Ces deux orientations (que l'on appèle **angles d'impact**) sont donc les paramètres d'impact. Sur la figure ci-dessous, nous voyons que les points C_1, C_2 (les centres des disques) et D (le point d'intersection des trajectoires initiales) forment un triangle. Les angles d'impact sont déterminés par deux des trois angles intérieurs de ce triangle, le troisième étant déterminé par les deux autres.

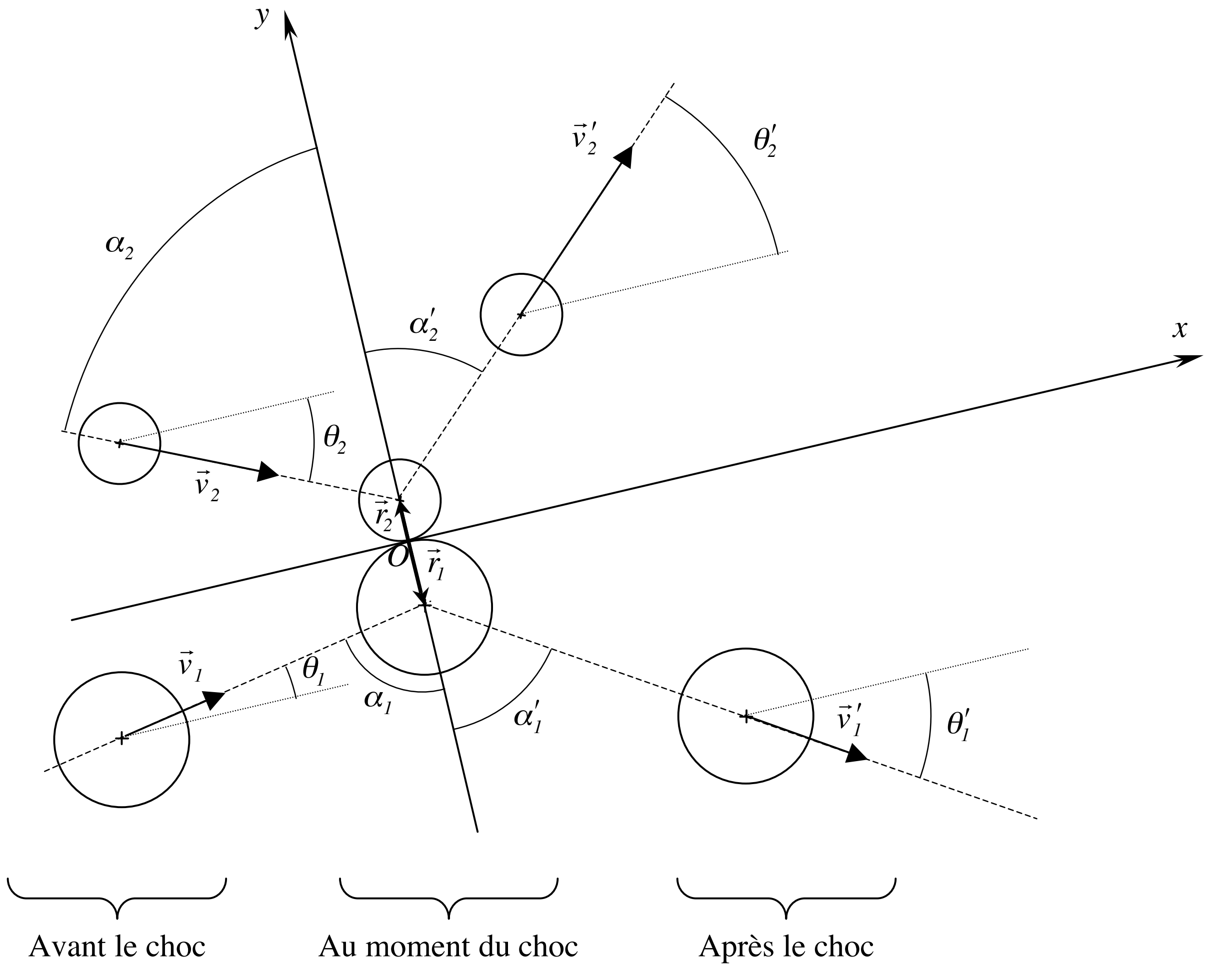


3. Choix du repère et du système de coordonnées

Les deux vitesses initiales des centres de masse déterminent un plan (celui sur lequel glissent les disques) dans lequel nous plaçons notre repère (à deux dimensions). Vu la discussion qui précède, nous prenons pour origine du repère le point d'impact et comme axes, la ligne d'impact et la droite qui lui est perpendiculaire, comme indiqué sur la figure ci-dessous :



Nous choisissons un système de coordonnées polaires. Les vitesses initiales seront donc déterminées par leur norme v et leur orientation θ par rapport à l'un des axes du repère (celui perpendiculaire à la ligne d'impact), comme indiqué sur la figure ci-dessous :



Remarquons que dans ce repère, les orientations θ_1 et θ_2 des vecteurs vitesses initiales, sont les deux angles (ou paramètres) d'impact. En se donnant les vitesses initiales (en particulier leur orientation) dans ce repère, on se donne également les paramètres d'impact. *C'est là que réside tout l'intérêt de ce repère particulier, puisque la connaissance des paramètres d'impact est indispensable à la détermination des vitesses finales des deux disques.* Les angles α_1, α_2 et les vecteurs $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$, seront utiles par la suite.

4. Calculs

Nous limitons notre étude au cas où les disques ne sont pas en rotation autour de leur centre de masse, ils ne sont animés que d'un mouvement de translation. Notre problème consiste à trouver les vitesses (linéaires des centres de masse) des disques après le choc. Le mouvement ayant lieu dans un plan, cela revient donc à trouver les normes et orientations des vitesses finales de chaque disque à savoir les quatre inconnues v'_1, θ'_1, v'_2 et θ'_2. Nous avons à disposition trois principes de conservation ; le principe de conservation de la quantité de mouvement, le principe de conservation de l'énergie mécanique (le choc étant supposé élastique, l'énergie cinétique est conservée) et le principe de conservation du moment cinétique. Le premier principe s'exprime par deux équations (une équation par composante, la quantité de mouvement étant un vecteur du plan), le deuxième principe fournit une équation (l'énergie est une grandeur scalaire) et le troisième principe en fournit une ; en effet la constance du vecteur moment cinétique total, concerne en particulier son orientation, laquelle est toujours normale au plan dans lequel a lieu le mouvement. Le vecteur moment cinétique n'a donc de composante que dans cette direction. Notre travail consiste à résoudre un système de quatre équations (exprimant les trois principes de conservation) à quatre inconnues (v'_1, θ'_1, v'_2 et θ'_2, les composantes des vitesses finales). Écrivons ces quatre équations (où r_1 et r_2 désignent les rayons des disques et les lettres primées concernent les grandeurs après le choc).

4.1 Les équations exprimant les principes de conservation

4.1.1 Principe de conservation du moment cinétique

$$L_z = L_z'$$

$$L = L'$$

$$l_1 + l_2 = l'_1 + l'_2$$

$$m_1 r_1 v_1 \sin\alpha_1 + m_2 r_2 v_2 \sin\alpha_2 = m_1 r_1 v_1' \sin\alpha_1' + m_2 r_2 v_2' \sin\alpha_2'$$

où α_i est l'angle entre le vecteur vitesse $\vec{v}_i$ et le vecteur position $\vec{r}_i$ du centre de masse du $i^{\text{ème}}$ disque au début du choc et α'_i est l'angle entre le vecteur vitesse $\vec{v}_i'$ et le vecteur position $\vec{r}_i$ du centre de masse du $i^{\text{ème}}$ disque à la fin du choc (c.f. fig. ci-dessus). Chaque vecteur position est le même au début et à la fin du choc ($\vec{r}_i' = \vec{r}_i$). La figure ci-dessus nous permet de déduire les relations entre les angles α_i, α_i' et les angles θ_i, θ_i', ces derniers représentant l'orientation des vitesses (avant et après le choc) :

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \theta_1 \qquad \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_2 \qquad \alpha_1' = \frac{\pi}{2} - \theta_1' \qquad \alpha_2' = \frac{\pi}{2} - \theta_2'$$

La substitution de ces relations dans l'équation précédente donne :

$$m_1 r_1 v_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) + m_2 r_2 v_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) = m_1 r_1 v_1' \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1'\right) + m_2 r_2 v_2' \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2'\right)$$

Les relations trigonométriques permettent de simplifier l'équation précédente :

$$m_1 r_1 v_1 \cos\theta_1 + m_2 r_2 v_2 \cos\theta_2 = m_1 r_1 v_1' \cos\theta_1' + m_2 r_2 v_2' \cos\theta_2' \qquad (1)$$

4.1.2 Principe de conservation de la quantité de mouvement

$$\vec{P} = \vec{P}'$$
$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P'_x \\ P'_y \end{pmatrix}$$

$$P_x = P'_x$$
$$p_{1x} + p_{2x} = p'_{1x} + p'_{2x}$$
$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x}$$

$$m_1 v_1 \cos\theta_1 + m_2 v_2 \cos\theta_2 = m_1 v'_1 \cos\theta'_1 + m_2 v'_2 \cos\theta'_2 \tag{2}$$

$$P_y = P'_y$$
$$p_{1y} + p_{2y} = p'_{1y} + p'_{2y}$$
$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 v'_{1y} + m_2 v'_{2y}$$

$$m_1 v_1 \sin\theta_1 + m_2 v_2 \sin\theta_2 = m_1 v'_1 \sin\theta'_1 + m_2 v'_2 \sin\theta'_2 \tag{3}$$

4.1.3 Principe de conservation de l'énergie mécanique (conservation de l'énergie cinétique)

$$E_{cin} = E'_{cin}$$
$$E_{cin\,1} + E_{cin\,2} = E'_{cin\,1} + E'_{cin\,2}$$
$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 \tag{4}$$

4.2 Solution du système d'équations

Les équations trouvées ci-dessus, constituent un système de quatre équations :

$$\begin{cases} m_1 r_1 v_1 \cos\theta_1 + m_2 r_2 v_2 \cos\theta_2 = m_1 r_1 v'_1 \cos\theta'_1 + m_2 r_2 v'_2 \cos\theta'_2 \\ m_1 v_1 \cos\theta_1 + m_2 v_2 \cos\theta_2 = m_1 v'_1 \cos\theta'_1 + m_2 v'_2 \cos\theta'_2 \\ m_1 v_1 \sin\theta_1 + m_2 v_2 \sin\theta_2 = m_1 v'_1 \sin\theta'_1 + m_2 v'_2 \sin\theta'_2 \\ m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 \end{cases} \tag{5}$$

Les substitutions suivantes permettent de simplifier la forme de ce système :

$$\begin{aligned} A &= m_1 r_1 v_1 \cos\theta_1 + m_2 r_2 v_2 \cos\theta_2 \\ B &= m_1 v_1 \cos\theta_1 + m_2 v_2 \cos\theta_2 \\ C &= m_1 v_1 \sin\theta_1 + m_2 v_2 \sin\theta_2 \\ D &= m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 \end{aligned} \tag{6}$$

On obtient ainsi :

$$\begin{cases} A = m_1 r_1 v_1' \cos\theta_1' + m_2 r_2 v_2' \cos\theta_2' \\ B = m_1 v_1' \cos\theta_1' + m_2 v_2' \cos\theta_2' \\ C = m_1 v_1' \sin\theta_1' + m_2 v_2' \sin\theta_2' \\ D = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 \end{cases} \tag{7}$$

De plus, les changements de variables suivants simplifient la résolution ce système :

$$\begin{aligned} \beta &= v_1' \cos\theta_1' \\ \delta &= v_2' \cos\theta_2' \\ \alpha &= v_1' \sin\theta_1' \\ \gamma &= v_2' \sin\theta_2' \end{aligned} \tag{8}$$

puisque l'on obtient ainsi :

$$\begin{cases} A = m_1 r_1 \beta + m_2 r_2 \delta \\ B = m_1 \beta + m_2 \delta \\ C = m_1 \alpha + m_2 \gamma \\ D = m_1\left(\alpha^2 + \beta^2\right) + m_2\left(\gamma^2 + \delta^2\right) \end{cases} \tag{9}$$

qui est un système d'équations du deuxième degré, dont les quatre inconnues sont maintenant α, β, δ et γ.

À l'aide des deux premières équations du système (9), on trouve les inconnues β et δ :

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{m_1}\left(B - \frac{A - r_1 B}{r_2 - r_1}\right) \\ &= v_1 \cos\theta_1 \\ \\ \delta &= \frac{1}{m_2} \frac{A - r_1 B}{\left(r_2 - r_1\right)} \\ &= v_2 \cos\theta_2 \end{aligned} \tag{10}$$

où les coefficients A et B ont été explicités à l'aide des relations (6).

De la troisième équation du système (9), on exprime γ en fonction de α :

$$\gamma = \frac{C - m_1 \alpha}{m_2} \tag{11}$$

On insère maintenant ces expressions de β, δ et γ dans la quatrième équation du système (9), en explicitant les coefficients C et D (c.f. (6)). On obtient ainsi :

$$m_1\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\alpha^2-2m_1\left(\frac{m_1}{m_2}v_1\sin\theta_1+v_2\sin\theta_2\right)\alpha+\frac{m_1}{m_2}(m_1-m_2)v_1^2\sin^2\theta_1+2m_1v_1v_2\sin\theta_1\sin\theta_2=0 \tag{12}$$

qui est une équation du deuxième degré en α, de la forme

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0$$

dont les deux solutions sont

$$\alpha=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Le discriminant est ici égal à

$$\left(2m_1(v_1\sin\theta_1-v_2\sin\theta_2)\right)^2$$

qui est toujours positif ou nul.

Les deux solutions de l'équation (12) sont :

$$\begin{aligned}\alpha_+&=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\&=v_1\sin\theta_1\\ \\ \alpha_-&=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\&=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1\sin\theta_1+\frac{2m_2}{m_1+m_2}v_2\sin\theta_2\end{aligned} \tag{13}$$

À ces deux solutions pour α correspondent deux solutions pour γ :

$$\begin{aligned}\gamma_+&=\frac{C-m_1\alpha_+}{m_2}\\&=v_2\sin\theta_2\\ \\ \gamma_-&=\frac{C-m_1\alpha_-}{m_2}\\&=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1\sin\theta_1+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v_2\sin\theta_2\end{aligned} \tag{14}$$

Par conséquent, le système (9) a deux solutions : le quadruplet α_+, β, δ et γ_+ d'une part et le quadruplet α_-, β, δ et γ_- d'autre part. On peut maintenant exprimer la solution v'_1, θ'_1, v'_2, θ'_2, du système initial (5), à laide des relations (8) entre ces huit variables.

Dans (8), on voit que :

$$\tan\theta_1' = \frac{\alpha}{\beta}$$

ce qui pour α_+ donne :

$$\tan\theta_1' = \tan\theta_1$$

d'où :

$$\theta_1' = \theta_1 \tag{15}$$

et pour α_- :

$$\tan\theta_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\tan\theta_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\frac{v_2}{v_1}\frac{\sin\theta_2}{\cos\theta_1} \tag{16}$$

De même,

$$\tan\theta_2' = \frac{\gamma}{\delta}$$

ce qui pour γ_+ donne :

$$\tan\theta_2' = \tan\theta_2$$

d'où :

$$\theta_2' = \theta_2 \tag{17}$$

et pour γ_- :

$$\tan\theta_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\frac{v_1}{v_2}\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_2} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\tan\theta_2 \tag{18}$$

Dans (8), on voit également que :

$$v_1'^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

ce qui pour α_+ donne :

$$v_1'^2 = v_1^2$$

d'où :

$$v_1' = v_1 \tag{19}$$

et pour α_- :

$$v_1'^2 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \sin\theta_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \sin\theta_2 \right)^2 + \left(v_1 \cos\theta_1 \right)^2 \tag{20}$$

De même,

$$v_2'^2 = \gamma^2 + \delta^2$$

ce qui pour γ_+ donne :

$$v_2'^2 = v_2^2$$

d'où :

$$v_2' = v_2 \tag{21}$$

et pour γ_- :

$$v_2'^2 = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \sin\theta_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \sin\theta_1 \right)^2 + \left(v_2 \cos\theta_2 \right)^2 \tag{22}$$

Les équations (15), (17), (19) et (21) expriment des vitesses finales égales aux vitesses initiales, ce qui correspond à la situation triviale où aucun choc n'a eu lieu entre les disques. En revanche, les équations (16), (18), (20) et (22) correspondent à la situation où les disques se sont entrechoqués. Nous récapitulons ci-dessous ces quatre équations qui expriment la solution du système (5), c'est-à-dire la solution (avec choc) de notre problème :

$$\tan\theta_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \tan\theta_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \frac{v_2}{v_1} \frac{\sin\theta_2}{\cos\theta_1}$$

$$v_1'^2 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \sin\theta_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \sin\theta_2 \right)^2 + \left(v_1 \cos\theta_1 \right)^2$$

$$\tan\theta_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \tan\theta_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \frac{v_1}{v_2} \frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_2}$$

$$v_2'^2 = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \sin\theta_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \sin\theta_1 \right)^2 + \left(v_2 \cos\theta_2 \right)^2$$

ou encore :

$$
\boxed{\begin{aligned}
\theta_1' &= \arctan\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\tan\theta_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\frac{v_2}{v_1}\frac{\sin\theta_2}{\cos\theta_1}\right)\\
v_1' &= \sqrt{\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1\sin\theta_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2\sin\theta_2\right)^2 + \left(v_1\cos\theta_1\right)^2}\\
\theta_2' &= \arctan\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\tan\theta_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\frac{v_1}{v_2}\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_2}\right)\\
v_2' &= \sqrt{\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_2\sin\theta_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1\sin\theta_1\right)^2 + \left(v_2\cos\theta_2\right)^2}
\end{aligned}} \tag{23}
$$

5. Discussion de la solution

Nous pouvons faire les remarques suivantes concernant la solution (23) :

a) Ces deux paires d'équations sont symétriques sous permutation des indices 1 et 2, ce qui physiquement signifie que rien dans le mouvement de ces disques ne permet de les distinguer.

b) Cette solution est indépendante des rayons r_1 et r_2 des disques. Le choix de notre repère explique cette indépendance (c.f. paragraphe 3).

6. Étude de cas particuliers

Nous étudions dans cette dernière partie quelques cas particuliers intéressants de la solution générale (23).

a) $m_1 = m_2$ (les disques ont la même masse)

Pour les orientations, on obtient :

$$\tan\theta_1' = \frac{v_2}{v_1}\frac{\sin\theta_2}{\cos\theta_1}$$

$$\tan\theta_2' = \frac{v_1}{v_2}\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_2}$$

Par conséquent :

$$\tan\theta_1'\tan\theta_2' = \tan\theta_1\tan\theta_2$$

Avant et après le choc, les produits des tangentes des orientations des vitesses sont égaux.

Pour les normes, on obtient :

$$v_1'^2 = \left(v_2\sin\theta_2\right)^2 + \left(v_1\cos\theta_1\right)^2$$

$$v_2'^2 = \left(v_1\sin\theta_1\right)^2 + \left(v_2\cos\theta_2\right)^2$$

Par conséquent :

$$v_1'^2 + v_2'^2 = v_1^2 + v_2^2$$

Avant et après le choc, les sommes des carrés des normes des vitesses sont égales.

b) $m_1 >> m_2$ (l'un des disques a une masse négligeable par rapport à celle de l'autre)

Pour l'orientation de la vitesse du disque le plus lourd, on obtient :

$$\tan\theta_1' \approx \tan\theta_1 \Rightarrow \theta_1' \approx \theta_1$$

L'orientation de la vitesse du disque le plus lourd ne change pas au cours du choc.

Pour la norme de la vitesse du disque le plus lourd, on obtient :

$$v_1'^2 \approx v_1^2 \Rightarrow v_1' \approx v_1$$

La norme de la vitesse du disque le plus lourd ne change pas au cours du choc.

Pour l'orientation de la vitesse du disque le plus léger, on obtient :

$$\tan\theta_2' \approx -\tan\theta_2 + 2\frac{v_1}{v_2}\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_2}$$

Pour la norme de la vitesse du disque le plus léger, on obtient :

$$v_2'^2 = \left(-v_2\sin\theta_2 + 2v_1\sin\theta_1\right)^2 + \left(v_2\cos\theta_2\right)^2$$

c) $v_2 = 0$ (l'un des disque est immobile avant le choc)

Pour l'orientation de la vitesse du disque incident, on obtient :

$$\tan\theta_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\tan\theta_1$$

Pour la norme de la vitesse du disque incident, on obtient :

$$v_1'^2 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1\sin\theta_1\right)^2 + \left(v_1\cos\theta_1\right)^2$$

Pour l'orientation de la vitesse du disque initialement immobile, on obtient :

$$\left|\tan\theta_2'\right| = \infty \Rightarrow \left|\theta_2'\right| = \frac{\pi}{2}$$

Après le choc, le vecteur vitesse du disque initialement immobile a la même direction que la ligne d'impact.

Pour la norme de la vitesse du disque initialement immobile, on obtient :

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1\sin\theta_1$$

Considérons encore un cas particulier de cette situation, celui où les deux disques ont la même masse ($m_1 = m_2$). La première équation de cette partie c) devient dans ce cas :

$$\tan\theta_1' = 0\,,\ \forall\theta_1 \neq \pm\frac{\pi}{2}$$

D'où :

$$\theta_1' = 0$$

Après le choc, le vecteur vitesse du disque incident est perpendiculaire à la ligne d'impact. Il est donc aussi perpendiculaire au vecteur vitesse de l'autre disque.

En résumé, lorsque deux disque de même masse s'entrechoquent alors que l'un d'eux est initialement immobile, les trajectoires des disques après le choc, sont perpendiculaires. Celle du disque initialement immobile est parallèle à la ligne d'impact, alors que celle du disque incident lui est perpendiculaire.

d) Choc frontal (les directions des vecteurs vitesse initiale sont confondues avec la ligne d'impact, cela signifie que $\theta_1 = \pm\frac{\pi}{2}$ et $\theta_2 = \pm\frac{\pi}{2}$)

Considérons le cas particulier où les vecteurs vitesse initiale sont dans le même sens ($\theta_1 = \theta_2 = \pm\frac{\pi}{2}$). Pour les orientations des vitesses finales, on obtient :

$$\left|\tan\theta_1'\right| = \left|\tan\theta_2'\right| = \infty \Rightarrow \left|\theta_1'\right| = \left|\theta_2'\right| = \frac{\pi}{2}$$

Après le choc, les directions des vecteurs vitesse restent confondues avec la ligne d'impact.

Pour les normes des vitesses finales, on obtient :

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$$

On retrouve ici la solution du choc élastique en une dimension.

7. Conclusion

Nous voyons dans ce travail, que la résolution du problème initial, simple en apparence puisqu'il ne fait intervenir que deux corps (le nombre minimal pour qu'existe une interaction), qu'il se limite au plan (on pourrait considérer le même problème dans un espace à trois dimensions) et au mouvement de translation des centres de masse (on pourrait prendre en compte le mouvement de rotation des disques autour de leur centre de masse), nécessite l'emploi des trois lois de conservation (énergie, quantité de mouvement et moment cinétique) qui constituent les fondement de la mécanique classique. En effet, comme le rappellent G. Cohen-Tannoudji et M. Spiro dans leur ouvrage *La matière-espace-temps*, « On peut en effet démontrer mathématiquement que toutes les lois de la dynamique classique sont équivalentes à cet ensemble de lois de conservation. ».

« Qu'importe la façon, pourvu qu'on ait l'hardiesse,
Qu'emporte la raison vers de nouvelles ivresses. »
PR