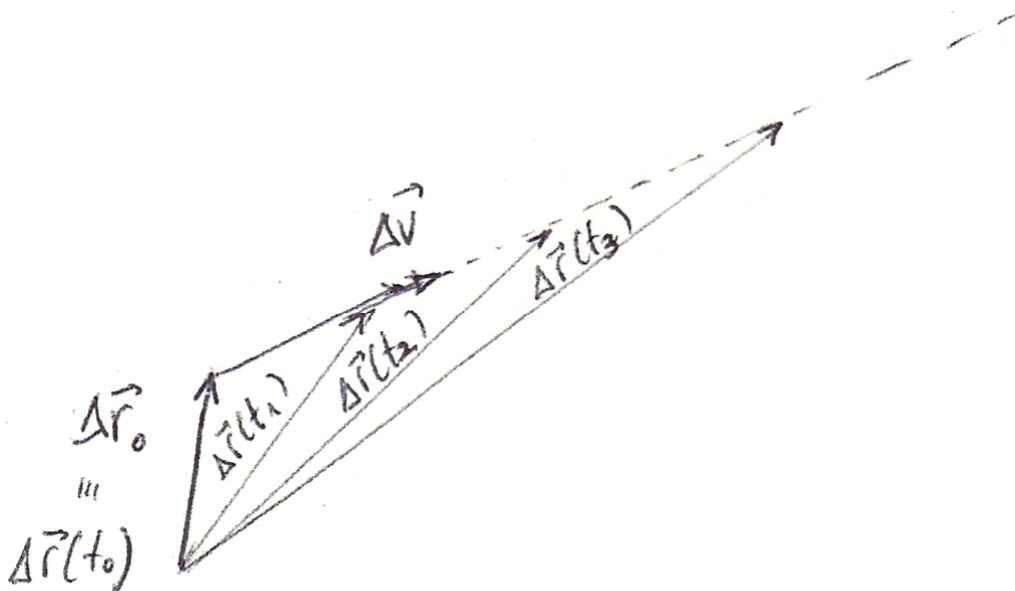
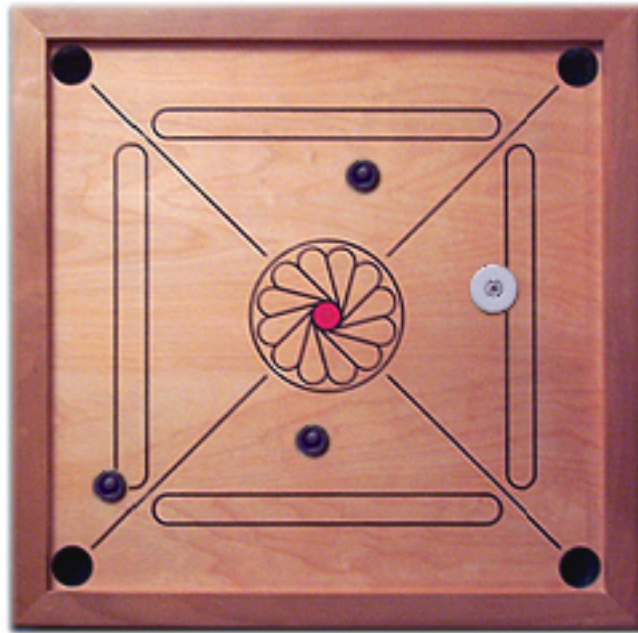


# CHOC ÉLASTIQUE ET RÉFÉRENTIEL DU CENTRE DE MASSE



*Par Pascal Rebetez*

*Septembre 2011*

## RÉSUMÉ

Nous considérons dans cet article le choc élastique de deux disques et étudions les conditions que doivent satisfaire les vitesses et positions initiales des disques dans le référentiel du laboratoire, pour que le choc soit frontal dans le référentiel du centre de masse des deux disques. À l'aide des méthodes géométriques employées pour déterminer ces conditions, nous cherchons la vitesse et la position du centre de masse relativement au référentiel du laboratoire. Finalement, nous nous intéressons à la position et à l'orientation du repère de la ligne d'impact relativement au repère des trajectoires initiales, ces deux repères étant liés au référentiel du laboratoire.

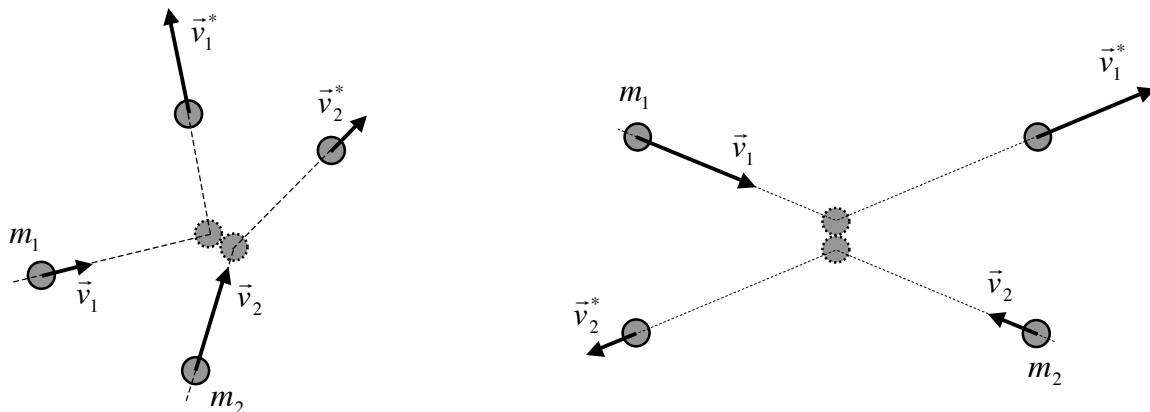
## CONTENU

1. Introduction .....	3
2. Relation entre les angles d'impact dans $R_{cm}$ et dans $R_{lab}$ .....	4
3. Condition sur les vecteurs positions dans $R_{lab}$ pour qu'un choc soit frontal dans $R_{cm}$ ...	8
4. Vitesse de $R_{cm}$ relativement à $R_{lab}$ .....	12
5. Position du centre de masse dans $R_{lab}$ .....	13
6. Position et orientation relatives du repère des trajectoires initiales et du repère de la ligne d'impact .....	15
7. Conclusion .....	19
8. Annexe : calcul de la position du centre de masse par intégration de sa vitesse .....	20

# 1. Introduction

Dans le cas d'un choc élastique en deux dimensions entre deux disques glissant sans frottement sur un plan horizontal, on peut connaître les vitesses des disques après le choc (les vitesses finales) si l'on connaît leur vitesse avant le choc (les vitesses initiales). L'expression des vitesses finales en fonction des vitesses initiales s'obtient en appliquant à ce choc les trois principes de conservation (de l'énergie mécanique, de la quantité de mouvement et du moment cinétique). Cette étude est menée en détail dans l'article *Choc élastique en 2 dimensions*.

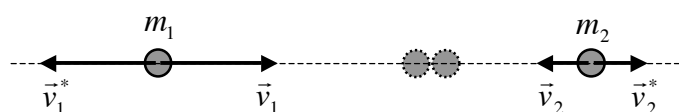
En dynamique des systèmes matériels en général et dans la situation particulière du choc décrit ci-dessus, il existe un référentiel dans lequel la dynamique s'exprime de manière remarquablement simple, celui dans lequel la quantité de mouvement totale du système est nulle. Ce référentiel est appelé **référentiel du centre de masse** ( $R_{cm}$ ). Considérons un référentiel, appelé **référentiel du laboratoire** ( $R_{lab}$ ), dans lequel le choc (élastique) des deux disques est *latéral*. En général, ce choc est aussi latéral dans le référentiel du centre de masse (c.f. fig. 1).



**Fig. 1 :** À gauche : choc élastique latéral dans le référentiel du laboratoire ( $R_{lab}$ ).  
À droite : en général, le choc est aussi latéral dans le référentiel du centre de masse ( $R_{cm}$ ).

Sur la figure ci-dessus, deux différences distinguent les schémas de gauche et de droite ; sur celui de droite, avant comme après le choc, les vitesses des disques sont parallèles et de sens opposés. De plus, bien que déviée par le choc, la vitesse de chaque disque garde la même norme. Ces deux propriétés sont toujours vraies dans le référentiel du centre de masse, elles sont démontrées dans l'article *Choc élastique en 2 dimensions*.

Dans ce travail, que nous menons dans le cadre théorique de la relativité galiléenne, nous cherchons les conditions que doivent satisfaire les vitesses initiales des disques dans le référentiel du laboratoire, pour que le choc soit *frontal* dans le référentiel du centre de masse (c.f. fig. 2).



**Fig. 2 :** Choc frontal dans le référentiel du centre de masse ( $R_{cm}$ ).

Un choc frontal est particulièrement simple puisqu'il est unidirectionnel (par définition). Notre travail consiste donc à rechercher les conditions sous lesquelles un choc (élastique) latéral prend la forme la plus simple possible c'est-à-dire de quantité de mouvement totale nulle d'une part et unidirectionnel d'autre part.

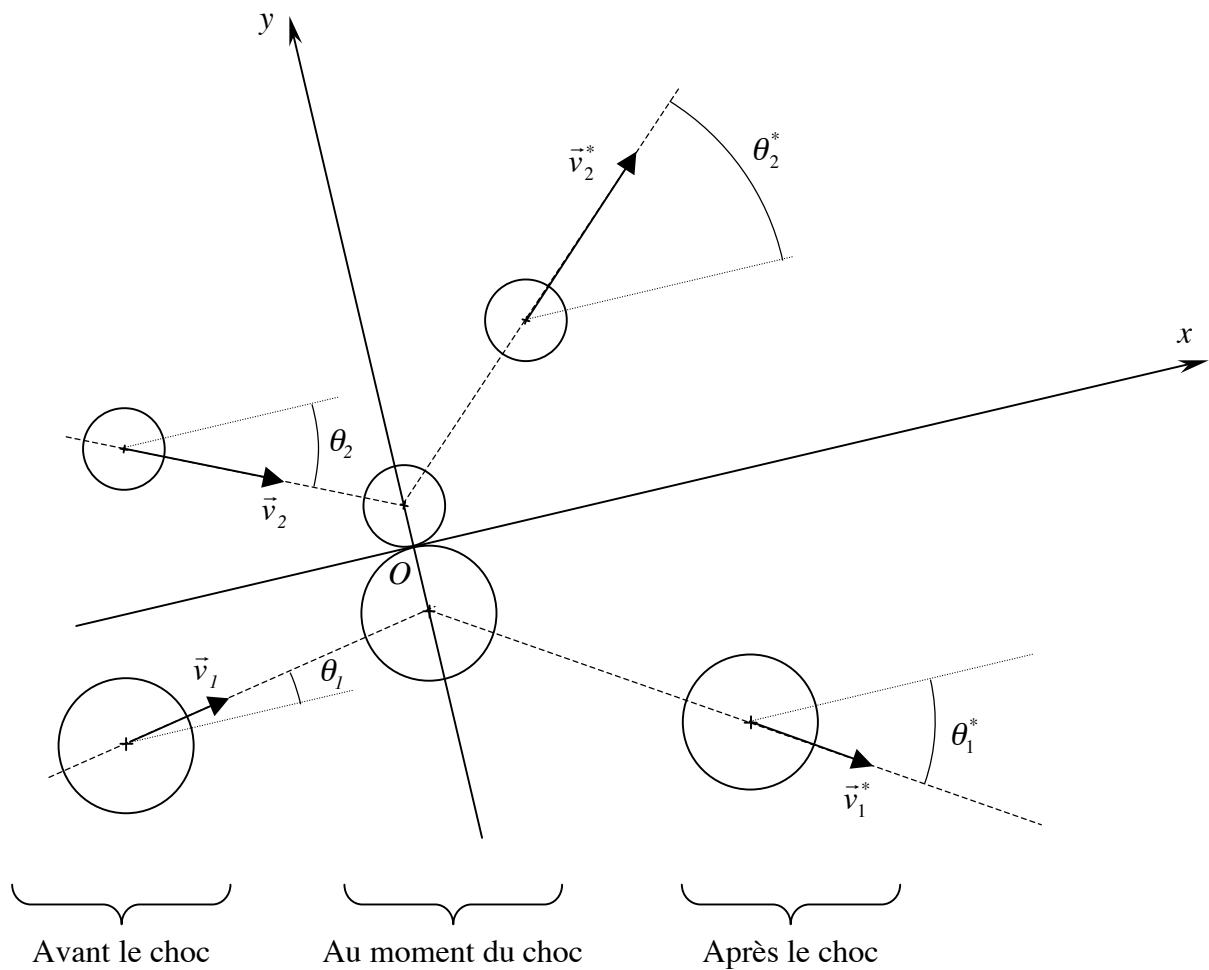
Nous chercherons ensuite la vitesse (notée  $\vec{v}_{\text{cm}}$ ) du référentiel du centre de masse relativement au référentiel du laboratoire. En effet, la vitesse d'un référentiel relativement à un autre caractérise entièrement le premier par rapport au deuxième.

Finalement, nous chercherons la position et l'orientation relatives du **repère des trajectoires initiales** et du **repère de la ligne d'impact**, ces deux repères étant liés au même référentiel. Ce dernier repère est celui dans lequel la description d'un choc est la plus simple (c.f. l'article *Choc élastique en 2 dimensions*), alors que le premier est celui par rapport auquel on est naturellement tenté d'étudier un choc, d'où l'intérêt de connaître la position et l'orientation relatives de ces deux repères.

Pour les différentes raisons évoquées ci-dessus, c'est la quête de la description la plus simple possible d'un choc qui motive notre travail. De même, l'approche employée pour cette étude, résolument géométrique, se distingue par sa simplicité puisque nous obtiendrons nos résultats à partir de quelques considérations géométriques élémentaires.

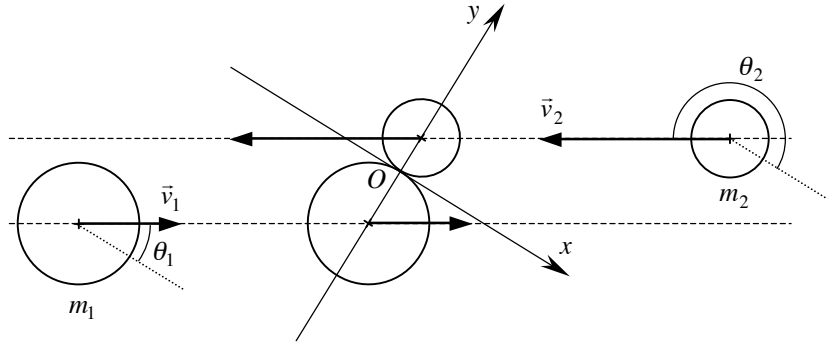
## 2. Relation entre les angles d'impact dans $R_{\text{cm}}$ et dans $R_{\text{lab}}$

Rappelons qu'on appelle ligne d'impact, la droite passant par les centres des deux disques à l'instant du choc et point d'impact, leur point de contact. Le repère de la ligne d'impact est celui ayant pour origine le point d'impact et pour axes, la ligne d'impact et sa perpendiculaire, (c.f. l'article *Choc élastique en 2 dimensions*). Dans celui-ci, un choc est frontal si les directions des vecteurs vitesse initiale (mesurées par les angles d'impacts  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , qui sont les paramètres d'impact du choc) sont parallèles à la ligne d'impact (l'axe y du repère). C'est le cas si les angles d'impact ont pour valeur  $\theta_1 = \pm \pi/2$  et  $\theta_2 = \pm \pi/2$  (c.f. fig. 3).



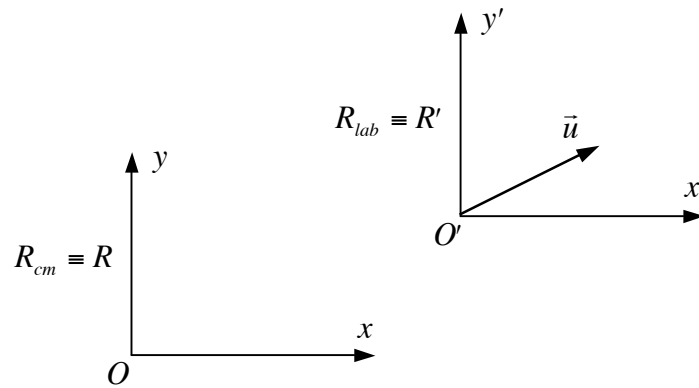
**Fig. 3 :** C'est dans le repère de la ligne d'impact que la description d'un choc est la plus simple. Dans celui-ci, un choc est frontal si les directions des vecteurs vitesse initiale sont parallèles à la ligne d'impact (l'axe  $x$  du repère), c'est le cas si les angles d'impact ont pour valeur  $\theta_1 = \pm \pi/2$  et  $\theta_2 = \pm \pi/2$ .

Considérons un référentiel dans lequel la quantité de mouvement totale des deux disques est nulle avant le choc (elle l'est aussi après le choc, par conservation de la quantité de mouvement). Il s'agit du référentiel du centre de masse  $R_{cm}$  dans lequel le choc a l'allure représentée sur la droite de la fig. 1. Représentons uniquement la phase initiale de ce choc dans  $R_{cm}$  et faisons figurer les angles d'impact  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Puisque la quantité de mouvement totale est nulle, nous avons  $\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$ , d'où  $\theta_2 = \theta_1 + \pi$  (c.f. fig. 4).



**Fig. 4 :** Phase initiale du choc dans  $R_{cm}$ .

Considérons maintenant un référentiel (d'inertie) quelconque appelé référentiel du laboratoire ( $R_{lab}$ ) dont l'origine  $O'$  se déplace à la vitesse  $\vec{u}$  par rapport à  $R_{cm}$ . Sans perte de généralité, orientons les axes de  $R_{lab}$  parallèlement à ceux de  $R_{cm}$  (c.f. fig. 5).

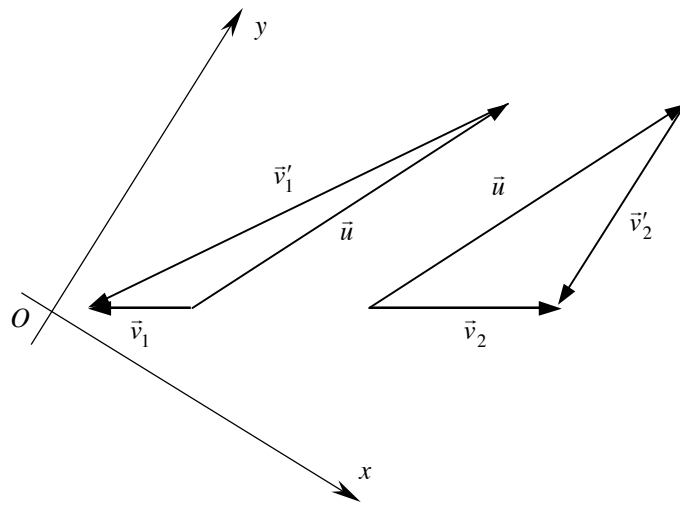


**Fig. 5 :**  $R_{lab}$  se déplace à la vitesse  $\vec{u}$  par rapport à  $R_{cm}$ .

À partir des vitesses initiales des disques dans  $R_{cm}$ , on peut connaître les vitesses dans  $R_{lab}$  à l'aide de la formule de composition des vitesses de la relativité galiléenne :

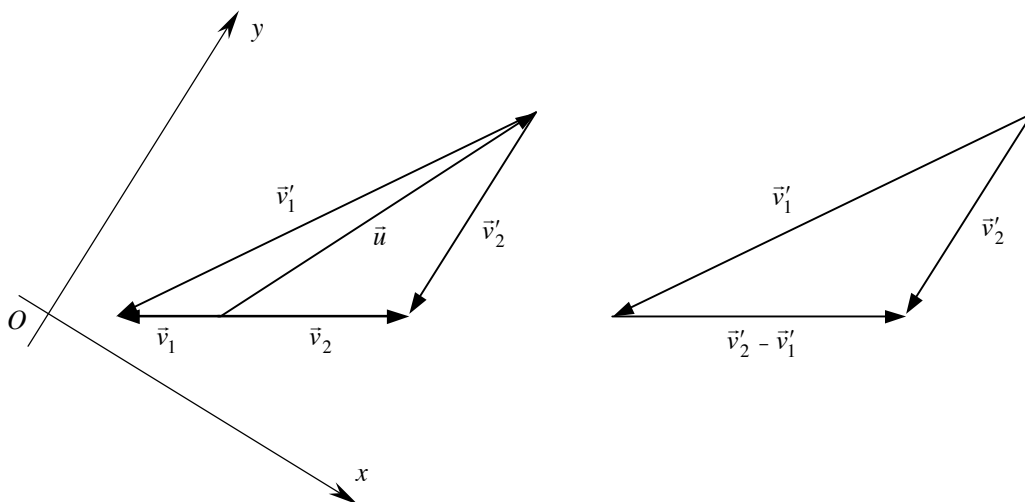
$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}' \quad (1)$$

où  $\vec{v}$  est la vitesse d'une particule dans un référentiel  $R$ ,  $\vec{v}'$  la vitesse de cette même particule dans un référentiel  $R'$  se déplaçant à la vitesse  $\vec{u}$  par rapport à  $R$ . Cette formule correspondant à une simple addition vectorielle, nous pouvons aisément représenter par une figure cette composition de vitesse où nous utiliserons désormais la notation suivante :  $R_{cm} \equiv R$  et  $R_{lab} \equiv R'$ , où les lettres non primées sont associées au référentiel du centre de masse  $R$  et les lettres primées, au référentiel du laboratoire  $R'$  (c.f. fig. 6).



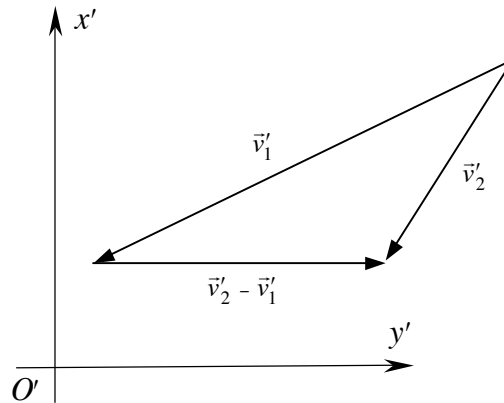
**Fig. 6 :** Représentation géométrique de la composition des vitesses des disques pour passer de  $R$  à  $R'$ . Seul le repère  $(O, x, y)$  lié à  $R$  est ici représenté. Le repère  $(O', x', y')$  lié à  $R'$  à la même orientation que le repère  $(O, x, y)$  (c.f. fig. 5).

Afin d'étudier la relation entre les angles d'impact dans  $R$  ( $\theta_1$  et  $\theta_2$ ) et les angles d'impact dans  $R'$  ( $\theta'_1$  et  $\theta'_2$ ), disposons d'une autre manière les vecteurs de la fig. 6 (c.f. fig. 7).



**Fig. 7 :** Autre disposition des vecteurs vitesses dans  $R$  et  $R'$  pour faire apparaître la relation entre les angles d'impact dans  $R$  et ceux dans  $R'$ .

Rappelons que les angles d'impact sont par définition les orientations des vecteurs vitesse par rapport à l'axe  $x$  du repère  $(O, x, y)$  de la ligne d'impact (c.f. fig. 4). On voit sur la fig. 7 que l'orientation du vecteur  $\vec{v}_2$  est la même que celle du vecteur  $\vec{v}_2' - \vec{v}_1'$  (ou, ce qui est équivalent, que l'orientation du vecteur  $\vec{v}_1$  est la même que celle du vecteur  $\vec{v}_1' - \vec{v}_2'$ ). Ceci détermine la condition recherchée : *pour que le choc soit frontal dans  $R$  (le référentiel du centre de masse), la direction des vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  doit être parallèle à l'axe  $y$  (la direction de la ligne d'impact) dans  $R$ , c'est à dire que la direction du vecteur  $\vec{v}_2' - \vec{v}_1'$  soit parallèle à l'axe  $y'$  dans  $R'$  (le référentiel du laboratoire) (c.f. fig. 8).*



**Fig. 8 :** *Pour que le choc soit frontal dans  $R$ , la direction du vecteur  $\vec{v}_2' - \vec{v}_1'$  doit être parallèle à l'axe  $y'$  (la direction de la ligne d'impact) dans  $R'$ .*

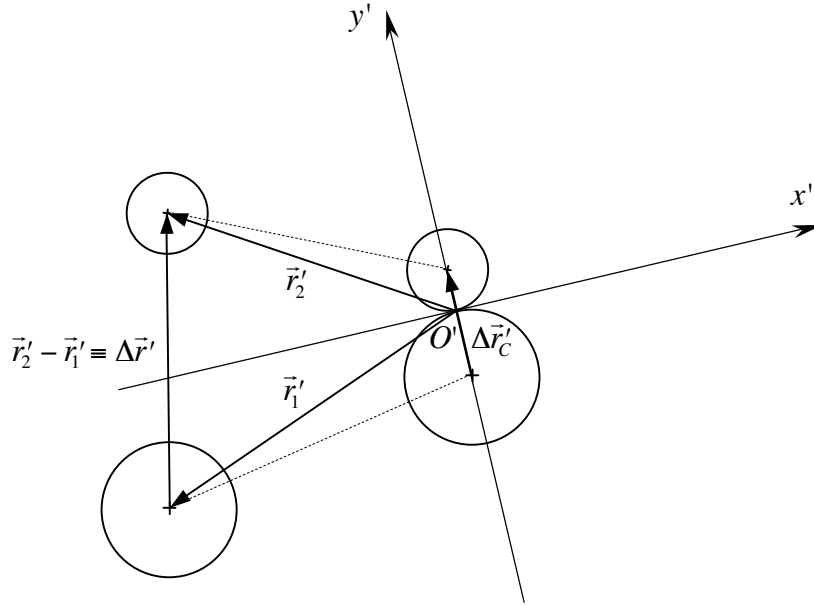
### 3. Condition sur les vecteurs positions dans $R_{\text{lab}}$ pour qu'un choc soit frontal dans $R_{\text{cm}}$

Maintenant que l'on a trouvé la condition que doivent satisfaire les vecteurs vitesse des disques dans le référentiel du laboratoire ( $R'$ ) pour que leur choc soit frontal dans le référentiel du centre de masse ( $R$ ), cherchons les implications de cette condition sur les vecteurs positions (dans  $R'$ ) des disques avant le choc.

Remarquons d'abord que la direction de la ligne d'impact (l'axe  $y'$ ) est la même que celle du vecteur différence des vecteurs position des disques à l'instant du choc ( $\Delta\vec{r}'_C$ ) (c.f. fig. 9) ; ce vecteur différence s'exprime par :

$$\vec{r}'_{2_c} - \vec{r}'_{1_c} \equiv \Delta\vec{r}'_C \quad (2)$$





**Fig. 9 :** La direction de la ligne d'impact (l'axe  $y'$ ) est la même que celle du vecteur différence des vecteurs position des disques à l'instant du choc ( $\Delta \vec{r}'_C$ ).

Les disques sont en mouvement rectiligne uniforme avant le choc, l'horaire de leur vecteur position est donc donné par :

$$\begin{cases} \vec{r}'_1 = \vec{r}'_{1_0} + \vec{v}'_1 \Delta t \\ \vec{r}'_2 = \vec{r}'_{2_0} + \vec{v}'_2 \Delta t \end{cases} \quad (3)$$

Le vecteur différence a donc pour horaire :

$$\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1 = \vec{r}'_{2_0} - \vec{r}'_{1_0} + (\vec{v}'_2 - \vec{v}'_1) \Delta t$$

Ce que l'on note :

$$\Delta \vec{r}' = \Delta \vec{r}'_0 + \Delta \vec{v}' \Delta t \quad (4)$$

Ainsi, à l'instant du choc :

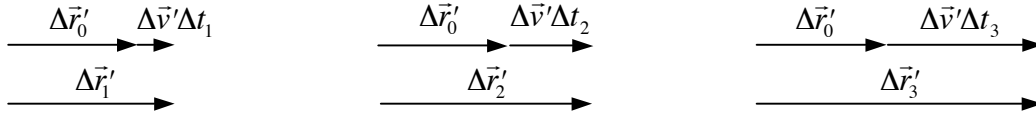
$$\Delta \vec{r}'_C = \Delta \vec{r}'_0 + \Delta \vec{v}' \Delta t_C \quad (5)$$

où  $\Delta t_C \equiv t_C - t_0$  est l'intervalle de temps entre l'instant  $t_0$  où la différence des vecteurs position est  $\Delta \vec{r}'_0$  et l'instant  $t_C$  du choc où la différence des vecteurs positions est  $\Delta \vec{r}'_C$ , dont la norme est égale à la distance séparant les centres des disques à l'instant du choc :

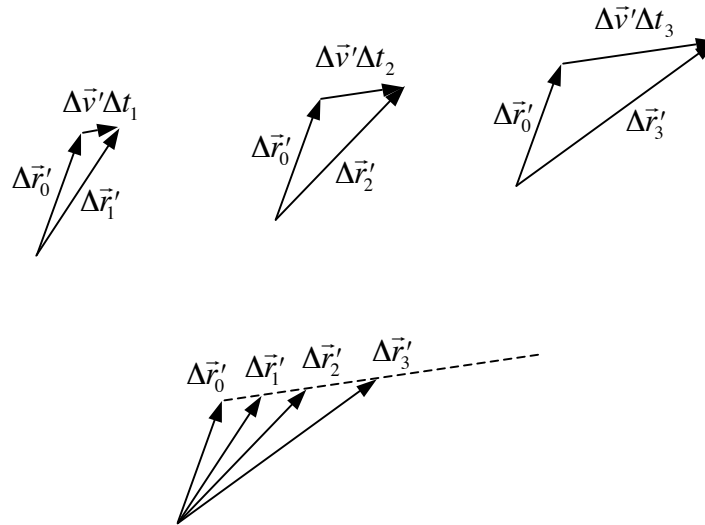
$$\|\Delta \vec{r}'_C\| = R_1 + R_2 \quad (6)$$

où  $R_1$  et  $R_2$  sont les rayons respectifs des disques (c.f. fig. 9).

La condition sur les vecteurs vitesse obtenue au paragraphe 2 met donc en relation les directions des vecteurs différence  $\Delta\vec{v}'$  et  $\Delta\vec{r}'_C$ . En effet, cette condition stipule que la direction de  $\Delta\vec{v}'$  doit être la même que celle de la ligne d'impact, laquelle a la même direction que  $\Delta\vec{r}'_C$  (c.f. fig. 9).  $\Delta\vec{v}'$  et  $\Delta\vec{r}'_C$  doivent donc avoir la même direction. L'équation (5) montre que ceci est réalisé si  $\Delta\vec{r}'_0$  a la même direction que  $\Delta\vec{v}'$ . En effet, le 2<sup>ème</sup> terme du membre de droite de l'équation (5),  $\Delta\vec{v}'\Delta t_C$ , est un vecteur ayant pour tout instant  $t_0 < t_C$ , la même direction et le même sens que  $\Delta\vec{v}'$  puisque  $\Delta t_C$  est un scalaire positif. Pour que le vecteur  $\Delta\vec{r}'_0 + \Delta\vec{v}'\Delta t_C$  ait la même direction que le vecteur  $\Delta\vec{v}'$ , il faut donc que  $\Delta\vec{r}'_0$  ait la même direction que  $\Delta\vec{v}'$  (c.f. fig. 10 et fig. 11).

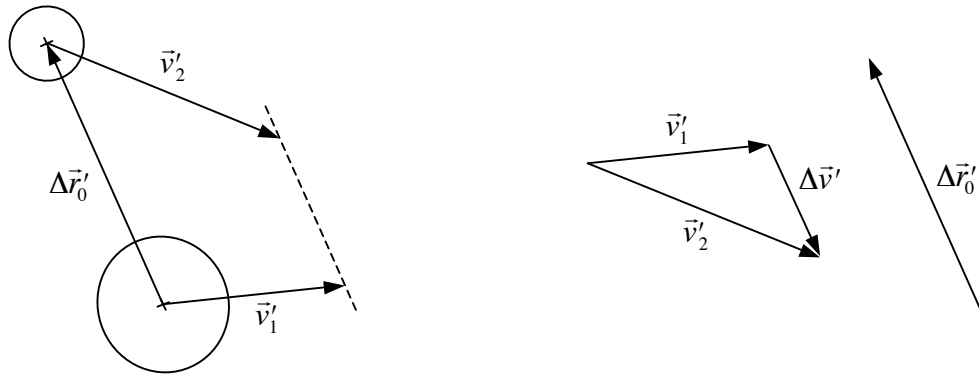


**Fig. 10 :** Si les vecteurs  $\Delta\vec{r}'$  et  $\Delta\vec{v}'$  ont la même direction à un instant donné avant le choc, cela restera le cas à tout autre instant avant le choc et à l'instant du choc.

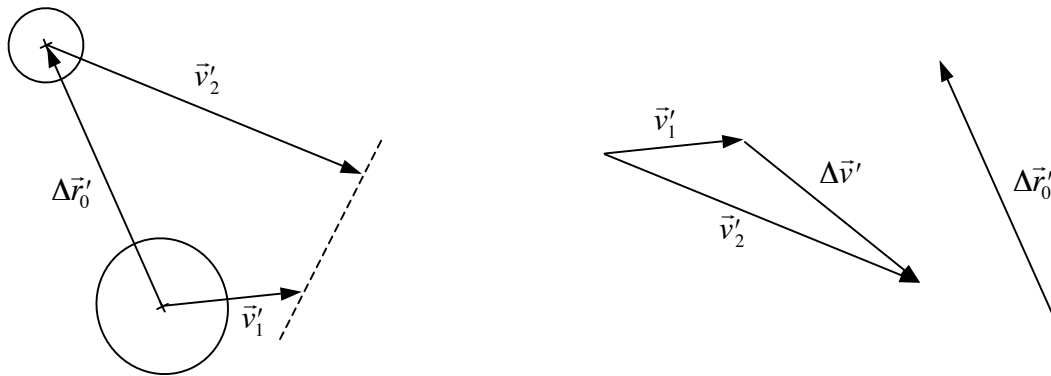


**Fig. 11 :** Si les vecteurs  $\Delta\vec{r}'$  et  $\Delta\vec{v}'$  n'ont pas la même direction à un instant donné avant le choc, cela restera le cas à tout autre instant avant le choc et à l'instant du choc. Le quatrième schéma indique par une ligne pointillée la direction du vecteur  $\Delta\vec{v}'$  et le vecteur  $\Delta\vec{r}'$  à différents instants.

Nous avons ainsi obtenu la réponse complète à la question initiale : *pour que le choc soit frontal dans le référentiel du centre de masse, les vecteurs  $\Delta\vec{r}'_0$  et  $\Delta\vec{v}'$  doivent être de même direction (et de sens opposé) dans le référentiel du laboratoire, où  $\Delta\vec{r}'_0 \equiv \vec{r}'_{2_0} - \vec{r}'_{1_0}$  est la différence des vecteurs position des disques à un instant quelconque avant le choc et  $\Delta\vec{v}' \equiv \vec{v}'_2 - \vec{v}'_1$  est la différence des vecteurs vitesse des disques avant le choc (c.f. fig. 12 et fig. 13).*

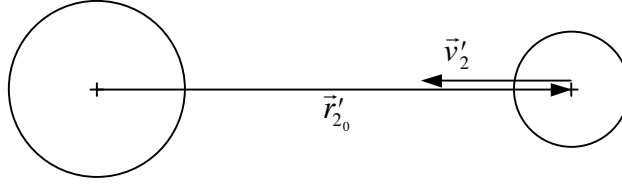


**Fig. 12 :** Situation où les vecteurs  $\Delta\vec{r}'_0$  et  $\Delta\vec{v}'$  ont la même direction dans le référentiel du laboratoire. Dans ce cas, la droite pointillée passant par l'extrémité des vecteurs vitesse  $\vec{v}'_1$  et  $\vec{v}'_2$  est parallèle au vecteur  $\Delta\vec{r}'_0$ . Le choc sera alors frontal dans le référentiel du centre de masse.



**Fig. 13 :** Situation où les vecteurs  $\Delta\vec{r}'_0$  et  $\Delta\vec{v}'$  n'ont pas la même direction dans le référentiel du laboratoire. Dans ce cas, la droite pointillée passant par l'extrémité des vecteurs vitesse  $\vec{v}'_1$  et  $\vec{v}'_2$  n'est pas parallèle au vecteur  $\Delta\vec{r}'_0$ . Le choc sera alors latéral dans le référentiel du centre de masse.

Remarquons que, d'après la transformation de Galilée, les vecteurs  $\Delta\vec{r}'_0 \equiv \vec{r}'_{2_0} - \vec{r}'_{1_0}$  et  $\Delta\vec{v}' \equiv \vec{v}'_2 - \vec{v}'_1$ , ne sont autres que la position et la vitesse du disque 2 relativement au référentiel du disque 1. Ainsi, la condition obtenue sur les vitesses des disques dans le référentiel du laboratoire pour que le choc soit frontal dans le référentiel du centre de masse, s'exprime de la manière suivante *dans le référentiel de l'un des disques* : le vecteur vitesse et le vecteur position de l'autre disque doivent être de même direction (et de sens opposé). En effet, dans ce référentiel (celui du disque 1 par exemple), on a  $\Delta\vec{r}'_0 = \vec{r}'_{2_0}$  et  $\Delta\vec{v}' = \vec{v}'_2$  car les vecteurs position et vitesse du disque 1 sont nuls dans son propre référentiel (c.f. fig. 14).



**Fig. 14 :** Pour que le choc soit frontal dans le référentiel du centre de masse, le vecteur vitesse et le vecteur position de l'un des disques dans le référentiel de l'autre disque, doivent être de même direction (et de sens opposé).

Autrement dit, dans le référentiel de l'un des disques, la paramètre d'impact doit être nul. Cette condition est tout à fait intuitive.

#### 4. Vitesse de $R_{\text{cm}}$ relativement à $R_{\text{lab}}$

Sur la fig. 7, nous voyons d'une part que la vitesse  $\vec{u}$  de  $R_{\text{lab}} \equiv R'$  relativement à  $R_{\text{cm}} \equiv R$  obéit à la relation vectorielle :

$$\vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}'_1 \quad (7)$$

et d'autre part que :

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}'_2 - \vec{v}'_1 \quad (8)$$

De plus, la quantité de mouvement totale étant nulle dans  $R_{\text{cm}}$ , on a :

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \Rightarrow m_1 \vec{v}_1 = -m_2 \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \vec{v}_1 \quad (9)$$

En substituant (9) dans (8), on obtient :

$$\vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}'_2 - \vec{v}'_1) \quad (10)$$

En substituant (10) dans (7), on obtient finalement:

$$\vec{u} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}'_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}'_2 = -\frac{1}{m_1 + m_2} (\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2) \equiv -\frac{\vec{P}'}{M} \quad (11)$$

où  $\vec{P}' \equiv \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$  est la quantité de mouvement totale dans  $R'$  et  $M \equiv m_1 + m_2$  est la masse totale du système. La vitesse  $\vec{v}'_{\text{cm}}$  de  $R_{\text{cm}} \equiv R$  relativement à  $R_{\text{lab}} \equiv R'$  est opposée à  $\vec{u}$ , ce qui d'après l'équation (11) donne :

$$\boxed{\vec{v}'_{\text{cm}} = -\vec{u} = \frac{\vec{P}'}{M}} \quad (12)$$

*La vitesse du référentiel du centre de masse du système relativement au référentiel du laboratoire est égale à la quantité de mouvement totale du système dans le référentiel du laboratoire, divisée par la masse totale du système.*

Ceci est un résultat général et important de la dynamique des systèmes matériels.

## 5. Position du centre de masse dans $R_{\text{lab}}$

De la vitesse du référentiel du centre de masse du système relativement au référentiel du laboratoire, obtenue en (12), on peut déduire la position de l'origine du repère lié au référentiel du centre de masse (que nous appellerons simplement centre de masse) du système relativement au référentiel du laboratoire. En effet, en exprimant (12) à l'aide des vitesses des disques, on a :

$$\vec{v}'_{\text{cm}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}'_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}'_2 \quad (13)$$

que l'on écrit, pour alléger l'expression :

$$\vec{v}'_{\text{cm}} = \mu_1 \vec{v}'_1 + \mu_2 \vec{v}'_2 \quad (14)$$

où  $\mu_1 \equiv m_1 / (m_1 + m_2)$  et  $\mu_2 \equiv m_2 / (m_1 + m_2)$ .

Comme la vitesse est par définition la dérivée par rapport au temps de la position, (14) peut s'écrire :

$$\frac{d}{dt} \vec{r}'_{\text{cm}} = \mu_1 \frac{d}{dt} \vec{r}'_1 + \mu_2 \frac{d}{dt} \vec{r}'_2 = \frac{d}{dt} (\mu_1 \vec{r}'_1 + \mu_2 \vec{r}'_2) \quad (15)$$

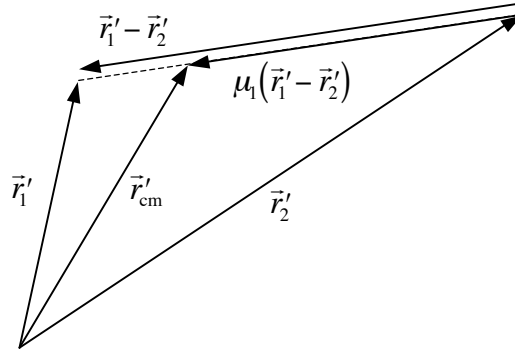
En multipliant par  $dt$  les membres de gauche et de droite de l'équation (15) puis en les intégrant, on obtient :

$$\vec{r}'_{\text{cm}} = \mu_1 \vec{r}'_1 + \mu_2 \vec{r}'_2 \quad (16)$$

L'intégration de (15) fait apparaître des termes dépendant des constantes d'intégration, qui s'annulent en choisissant correctement le repère par rapport auquel s'expriment les vecteurs position. Ce point est développé dans l'annexe. Comme  $\mu_1 + \mu_2 = 1$ , on peut écrire (16) sous la forme :

$$\vec{r}'_{\text{cm}} = \mu_1 \vec{r}'_1 + (1 - \mu_1) \vec{r}'_2 = \mu_1 (\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2) + \vec{r}'_2 = \vec{r}'_2 + \mu_1 (\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2) \quad (17)$$

En remarquant que  $\mu_1 < 1$ , la relation vectorielle (17) se représente aisément par une figure (c.f. fig. 15).



**Fig. 15 :** Représentation géométrique de la relation vectorielle (17). Le centre de masse, repéré par le vecteur position  $\vec{r}'_{\text{cm}}$ , est toujours situé sur le segment joignant les deux masses.

Cette figure montre d'une part que le centre de masse est toujours situé sur le segment joignant les deux masses. On voit d'autre part que la distance entre le centre de masse et chacune des masses obéit aux relations suivantes :

$$\|\vec{r}'_{\text{cm}} - \vec{r}'_2\| = \mu_1 \|\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2\| \Rightarrow \frac{\|\vec{r}'_{\text{cm}} - \vec{r}'_2\|}{\|\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2\|} = \mu_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad (18)$$

En notant  $d_2 \equiv \|\vec{r}'_{\text{cm}} - \vec{r}'_2\|$  la distance entre le centre de masse et la masse 2,  $D \equiv \|\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2\|$  la distance entre les deux masses et  $M \equiv m_1 + m_2$  la masse totale, (18) s'écrit :

$$\frac{d_2}{D} = \frac{m_1}{M} \quad (19)$$

De manière analogue, on obtient :

$$\frac{d_1}{D} = \frac{m_2}{M} \quad (20)$$

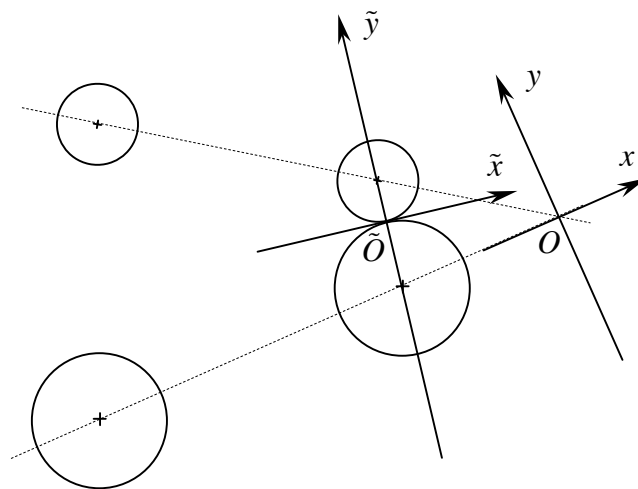
En combinant (19) et (20), on obtient finalement :

$$\boxed{\frac{d_1}{d_2} = \frac{m_2}{m_1}} \quad (21)$$

Le rapport des distances au centre de masse est inversement proportionnel au rapport des masses.

## 6. Position et orientation relatives du repère des trajectoires initiales et du repère de la ligne d'impact

Dans ce qui précède, nous avons choisi pour repère celui de la ligne d'impact, dans le référentiel du laboratoire autant que dans le référentiel de centre de masse (c.f. §2). Nous cherchons ici la position et l'orientation relatives du repère des trajectoires initiales et du repère de la ligne d'impact, ceci *dans le référentiel du laboratoire* où en général le choc est latéral, comme l'illustre la figure 1. On appelle **repère des trajectoires initiales**, celui dont l'un des axes est confondu avec la trajectoire initiale de l'un des disques et qui a pour origine un point quelconque de cette trajectoire, par exemple le point d'intersection des deux trajectoires initiales (c.f. fig. 16).



**Fig. 16 :** Le repère de la ligne d'impact  $(\tilde{O}, \tilde{x}, \tilde{y})$  et le repère des trajectoires initiales  $(O, x, y)$ , tous deux liés au référentiel du laboratoire.

Bien que dans ce paragraphe, ces repères soient tous deux liés au référentiel du laboratoire, nous omettons par commodité les primes sur les grandeurs (c.f. convention d'écriture du §2 pour distinguer les référentiels  $R_{lab}$  et  $R_{cm}$ ). Cependant, pour distinguer ces deux repères, celui de la ligne d'impact est noté  $(\tilde{O}, \tilde{x}, \tilde{y})$  et celui des trajectoires initiales,  $(O, x, y)$  (c.f. fig. 16). Relativement au repère des trajectoires initiales, le repère de la ligne d'impact est entièrement caractérisé par la position de son origine (le point d'impact  $\tilde{O}$ ) et l'orientation de (l'un de) ses axes (la ligne d'impact  $\tilde{y}$ ).

### **Orientation du repère de la ligne d'impact**

Rappelons que la direction de la ligne d'impact (l'axe  $\tilde{y}$ ) est la même que celle du vecteur différence des vecteurs position des disques à l'instant du choc ( $\Delta\vec{r}_C$ ) (c.f. §3). Ainsi, chercher l'orientation du repère de la ligne d'impact revient à chercher l'orientation du vecteur  $\Delta\vec{r}_C$ , notée  $\theta_C$ . L'angle  $\theta_C$  obéit à la relation :

$$\theta_C = \arctan\left(\frac{\Delta y_C}{\Delta x_C}\right) \quad (22)$$

où  $\Delta x_C$  et  $\Delta y_C$  sont les coordonnées cartésiennes du vecteur  $\Delta\vec{r}_C$  qui d'après (5) vaut :

$$\Delta\vec{r}_C = \Delta\vec{r}_0 + \Delta\vec{v}\Delta t_C \quad (23)$$

L'expression de (23) en coordonnées cartésiennes donne :

$$\begin{pmatrix} \Delta x_C \\ \Delta y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x_0 + \Delta v_x \Delta t_C \\ \Delta y_0 + \Delta v_y \Delta t_C \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_C = \Delta x_0 + \Delta v_x \Delta t_C \\ \Delta y_C = \Delta y_0 + \Delta v_y \Delta t_C \end{cases} \quad (24)$$

En substituant (24) dans (22), on obtient :

$$\theta_C = \arctan\left(\frac{\Delta y_0 + \Delta v_y \Delta t_C}{\Delta x_0 + \Delta v_x \Delta t_C}\right) \quad (25)$$

et l'on voit que pour des vecteurs  $\Delta\vec{r}_0$  et  $\Delta\vec{v}$  donnés (les conditions initiales du choc) l'angle  $\theta_C$  est entièrement déterminé par l'intervalle de temps  $\Delta t_C \equiv t_C - t_0$  (c.f. §3). L'équation (6) nous permet de trouver  $\Delta t_C$ . En effet :

$$\|\Delta\vec{r}_C\| = R_1 + R_2 \equiv R \quad (26)$$

On calcul le membre de gauche de cette équation en utilisant l'expression du produit scalaire en coordonnées polaire .

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\varphi \quad (27)$$

où  $\varphi$  est l'angle entre les vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ . De (27) il découle :

$$(\vec{a})^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\| \|\vec{a}\| \cdot 1 = \|\vec{a}\|^2 \quad (28)$$

En appliquant le résultat (28) à (26) et en substituant (23), on obtient :

$$R^2 = \|\Delta\vec{r}_C\|^2 = (\Delta\vec{r}_C)^2 = (\Delta\vec{r}_0 + \Delta\vec{v}\Delta t_C)^2 \quad (29)$$

En développant le membre de droite de (29), en appliquant à nouveau (28) puis en réarrangeant les termes, on obtient :

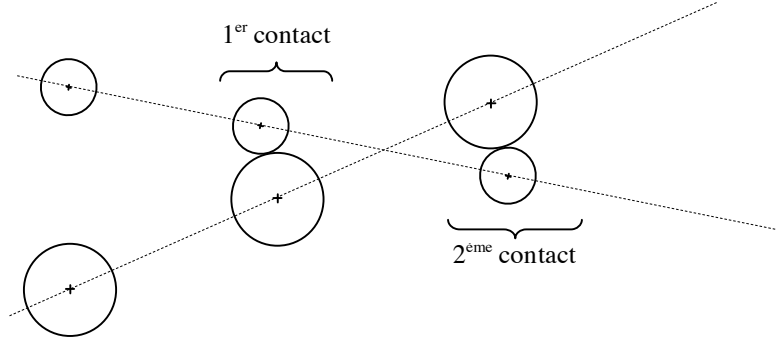
$$\|\Delta\vec{v}\|^2 (\Delta t_C)^2 + 2\|\Delta\vec{r}_0\| \|\Delta\vec{v}\| \cos\varphi \Delta t_C + \|\Delta\vec{r}_0\|^2 - R^2 = 0 \quad (30)$$

où  $\varphi$  est l'angle entre les vecteurs  $\Delta\vec{r}_0$  et  $\Delta\vec{v}$ . C'est une équation du 2<sup>ème</sup> degré en  $\Delta t_C$ , dont les deux solutions sont :



$$\Delta t_C = \frac{-\|\Delta \vec{r}_0\| \cos \varphi \pm \sqrt{R^2 - (\|\Delta \vec{r}_0\| \sin \varphi)^2}}{\|\Delta \vec{v}\|} \quad (31)$$

La correspondance physique de ces deux solutions mathématiques est la suivante : le choc est par définition la situation où les disques sont en contact, c'est-à-dire où la distance qui les sépare est nulle. Cette situation existe en effet pour deux positions différentes des disques sur leur trajectoire (c.f. fig. 17).



*Fig. 17 : Les disques ne pouvant se traverser, seul le premier contact est possible.*

En supposant que sur cette figure, les disques se déplacent de la gauche vers la droite et qu'ils ne peuvent passer au travers l'un de l'autre, le deuxième contact entre les disques n'est pas possible puisqu'après le premier contact, les trajectoires des disques sont modifiées (c.f. fig. 1). Ainsi, seul le premier contact est possible ; c'est la solution physique, celle correspondant à la valeur la plus faible de  $\Delta t_C$ , avec le signe négatif devant la racine :

$$\Delta t_C = \frac{-\|\Delta \vec{r}_0\| \cos \varphi - \sqrt{R^2 - (\|\Delta \vec{r}_0\| \sin \varphi)^2}}{\|\Delta \vec{v}\|} \quad (32)$$

Pour exprimer de manière cohérente l'angle  $\theta_C$ , exprimons encore  $\Delta x_0$ ,  $\Delta y_0$ ,  $\Delta v_x$  et  $\Delta v_y$  en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \Delta x_0 &= \|\Delta \vec{r}_0\| \cos \alpha_0 \\ \Delta y_0 &= \|\Delta \vec{r}_0\| \sin \alpha_0 \\ \Delta v_x &= \|\Delta \vec{v}\| \cos \beta \\ \Delta v_y &= \|\Delta \vec{v}\| \sin \beta \end{aligned} \quad (33)$$

où  $\alpha_0$  et  $\beta$  sont les orientations des vecteurs  $\Delta \vec{r}_0$  respectivement  $\Delta \vec{v}$ . Ainsi :

$$\varphi = \beta - \alpha_0 \quad (34)$$

On obtient l'expression finale de l'angle  $\theta_C$  en substituant (34), (33) et (32) dans (25), ce qui donne :

$$\theta_C = \arctan \left( \frac{\|\Delta\vec{r}_0\| \sin \alpha_0 - \left( \|\Delta\vec{r}_0\| \cos(\beta - \alpha_0) + \sqrt{R^2 - \left( \|\Delta\vec{r}_0\| \sin(\beta - \alpha_0) \right)^2} \right) \sin \beta}{\|\Delta\vec{r}_0\| \cos \alpha_0 - \left( \|\Delta\vec{r}_0\| \cos(\beta - \alpha_0) + \sqrt{R^2 - \left( \|\Delta\vec{r}_0\| \sin(\beta - \alpha_0) \right)^2} \right) \cos \beta} \right) \quad (35)$$

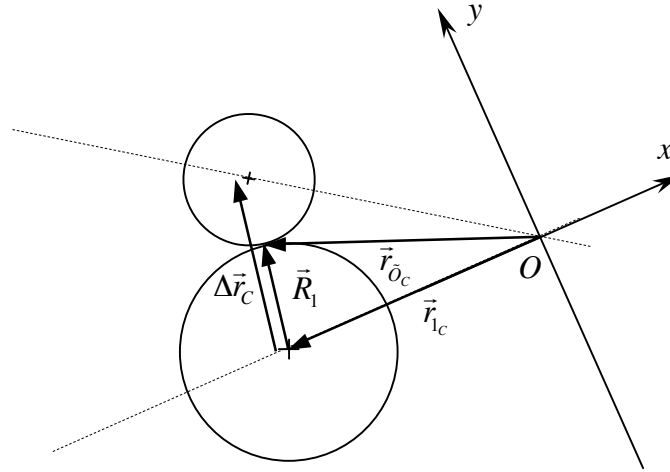
où n'apparaissent que les conditions initiales du choc, à savoir les normes et orientations des vecteurs  $\Delta\vec{r}_0$  et  $\Delta\vec{v}$  (et les rayons des disques  $R \equiv R_1 + R_2$ ). On remarque cependant que la norme du vecteur  $\Delta\vec{v}$  n'apparaît pas dans (35) mais uniquement son orientation  $\beta$ .

### *Position de l'origine du repère de la ligne d'impact*

L'origine du repère de la ligne d'impact étant par définition le point de contact des disques à l'instant du choc (c.f. §2), le vecteur position de cette origine obéit à la relation (c.f. fig. 18) :

$$\vec{r}_{\vec{O}_c} = \vec{r}_{1_c} + \vec{R}_1 \quad (36)$$

où  $\vec{r}_{1_c}$  est la position du centre du disque 1 à l'instant du choc et  $\vec{R}_1$ , un vecteur ayant la même orientation que celle du vecteur  $\Delta\vec{r}_C$  et dont la norme est égale au rayon  $R_1$  du disque 1.



**Fig. 18 :** Relation vectorielle à laquelle obéit le vecteur position de l'origine du repère de la ligne d'impact.

D'après (3) :

$$\vec{r}_{1_c} = \vec{r}_{1_0} + \vec{v}_1 \Delta t_C \quad (37)$$

On peut exprimer  $\vec{R}_1$  à l'aide du vecteur  $\Delta\vec{r}_C$  :

$$\bar{R}_1 = \frac{\Delta \vec{r}_C}{\|\Delta \vec{r}_C\|} R_1 \quad (38)$$

puisque  $\frac{\Delta \vec{r}_C}{\|\Delta \vec{r}_C\|}$  est un vecteur de norme 1 ayant l'orientation du vecteur  $\Delta \vec{r}_C$ .

D'après (5) et (6), (38) peut s'écrire :

$$\bar{R}_1 = \left( \Delta \vec{r}_0 + \Delta \vec{v} \Delta t_C \right) \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (39)$$

En substituant (39) et (37) dans (36), on obtient :

$$\vec{r}_{\bar{O}_C} = \vec{r}_{i_0} + \vec{v}_1 \Delta t_C + \left( \Delta \vec{r}_0 + \Delta \vec{v} \Delta t_C \right) \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (40)$$

En notant  $\rho = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$  et en explicitant les vecteurs différences  $\Delta \vec{r}_0$  et  $\Delta \vec{v}$  dans (40), on obtient finalement, après réarrangement des termes :

$$\boxed{\vec{r}_{\bar{O}_C} = (1 - \rho) \vec{r}_{i_0} + \rho \vec{r}_{i_2} + \left( (1 - \rho) \vec{v}_1 + \rho \vec{v}_2 \right) \Delta t_C} \quad (41)$$

où  $\Delta t_C$  est donné en (32). Ainsi, l'expression (41) donne le vecteur position de l'origine du repère de la ligne d'impact relativement au repère des trajectoires initiales, en fonction des conditions initiales du choc à savoir les positions initiales des deux disques  $\vec{r}_{i_0}$  et  $\vec{r}_{i_2}$  ainsi que leur vitesse initiale  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ . Apparaissent encore dans (41), par le biais de  $\Delta t_C$ , les normes et l'orientation relative des vecteurs différence  $\Delta \vec{r}_0$  et  $\Delta \vec{v}$  (c.f. (32)), lesquelles sont entièrement déterminées par les conditions initiales du choc. Ainsi,  $\vec{r}_{\bar{O}_C}$  est une combinaison linéaire des vecteurs positions et vitesses initiales des disques.

## 7. Conclusion

Dans ce travail, tous les résultats ont été déduits de figures faisant apparaître des relations géométriques. La figure 7 en est la pierre angulaire puisqu'elle contient les informations dont découlent les résultats principaux obtenus, à savoir les conditions recherchées sur les positions et vitesses initiales des disques dans le référentiel du laboratoire (§2 et §3), la vitesse du référentiel du centre de masse relativement au référentiel du laboratoire (§4) et la position du centre de masse relativement aux positions des masses, dans le référentiel du laboratoire (§5). Notons que la simplicité de la figure 7 résulte de la formule de composition des vitesses de la relativité galiléenne, cette dernière découlant de la transformation de Galilée.

Cette étude illustre à plusieurs reprises l'importance de distinguer les notions de repère et de référentiel. En effet, nous considérons autant des repères liés à des référentiels différents (celui du centre de masse et celui du laboratoire), que des repères différents (celui de la ligne d'impact et celui des trajectoires initiales) liés au même référentiel (celui du laboratoire).

Les calculs qui nous ont permis d'obtenir la condition que doivent satisfaire les vecteurs positions des disques dans le référentiel du laboratoire pour que le choc soit frontal dans le référentiel du centre de masse, nous ont aussi donné la condition que doivent satisfaire ces vecteurs dans le référentiel de l'un des disques pour que le choc soit frontal dans le référentiel du centre de masse. Dans le référentiel de l'un des disques, cette condition est remarquablement simple et intuitive.

## 8. Annexe : calcul de la position du centre de masse par intégration de sa vitesse

En multipliant par  $dt$  les membres de gauche et de droite de l'équation (15) puis en les intégrant, on obtient :

$$\begin{aligned} \int d\vec{r}'_{\text{cm}} &= \mu_1 \int d\vec{r}'_1 + \mu_2 \int d\vec{r}'_2 \Rightarrow \\ \vec{r}'_{\text{cm}} - \vec{r}'_{\text{cm}_0} &= \mu_1 (\vec{r}'_1 - \vec{r}'_{1_0}) + \mu_2 (\vec{r}'_2 - \vec{r}'_{2_0}) \Rightarrow \\ \vec{r}'_{\text{cm}} - (\mu_1 \vec{r}'_1 + \mu_2 \vec{r}'_2) &= \vec{r}'_{\text{cm}_0} - (\mu_1 \vec{r}'_{1_0} + \mu_2 \vec{r}'_{2_0}) \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

Le membre de droite de la dernière équation ci-dessus est un vecteur position dépendant des valeurs initiales des vecteurs  $\vec{r}'_1$ ,  $\vec{r}'_2$  et  $\vec{r}'_{\text{cm}}$ , à savoir les constantes d'intégrations  $\vec{r}'_{1_0}$ ,  $\vec{r}'_{2_0}$  et  $\vec{r}'_{\text{cm}_0}$ . On a toujours la possibilité de choisir un repère (lié au référentiel du laboratoire) de sorte que ce vecteur  $\vec{r}'_{\text{cm}_0} - (\mu_1 \vec{r}'_{1_0} + \mu_2 \vec{r}'_{2_0})$  soit nul. Ainsi, (A1) donne :

$$\vec{r}'_{\text{cm}} - (\mu_1 \vec{r}'_1 + \mu_2 \vec{r}'_2) = \vec{0} \quad (\text{A2})$$

D'où :

$$\vec{r}'_{\text{cm}} = \mu_1 \vec{r}'_1 + \mu_2 \vec{r}'_2 \quad (\text{A3})$$