

# Énergie relativiste

## Question 1

Quelle est l'énergie nécessaire pour accélérer un électron de  $\beta_1$  à  $\beta_2$  ?

Cette énergie s'obtient en soustrayant à l'énergie totale de l'électron se déplaçant à la vitesse  $\beta_2$  son énergie totale lorsqu'il se déplace à  $\beta_1$ .

$$e[b1_, b2_] := m (1 / \text{Sqrt}[1 - b2^2] - 1 / \text{Sqrt}[1 - b1^2])$$

$$e[0.57, 0.86] /. m \rightarrow 0.511 (* \text{masse en MeV} *)$$

$$0.37946$$

$$e[0.86, 0.990] /. m \rightarrow 0.511$$

$$2.621$$

## Question 2

Un proton se déplace à la vitesse  $\beta$ .

a) Que vaut son énergie de masse ?

b) Que vaut son énergie totale ?

c) Que vaut son énergie cinétique ?

a) L'énergie de masse est donnée par la masse du proton (938 MeV)

b) L'énergie totale par :

$$e[b_] := m / \text{Sqrt}[1 - b^2]$$

$$e[0.987] /. m \rightarrow 938$$

$$5836.23$$

c) L'énergie cinétique par :

$$ecin[b_] := e[b] - m$$

$$ecin[0.987] /. m \rightarrow 938$$

$$4898.23$$

## Question 3

Une particule instable de masse  $m$  se désintègre en deux fragments qui s'éloignent respectivement aux vitesses  $\beta_1$  et  $\beta_2$ . Que valent les masses de ces fragments ?

L'énergie totale et la quantité de mouvement se conservent, ce qui permet d'écrire deux équations qu'il faut résoudre par rapport à  $m_1$  et  $m_2$  :

$$\text{sol} = \text{Solve}\{m == m1 / \text{Sqrt}[1 - b1^2] + m2 / \text{Sqrt}[1 - b2^2], \\ m1 / \text{Sqrt}[1 - b1^2] * b1 + m2 / \text{Sqrt}[1 - b2^2] * b2 == 0\}, \{m1, m2\}$$

$$\left\{ \left\{ m1 \rightarrow -\frac{\sqrt{1 - b1^2} b2 m}{b1 - b2}, m2 \rightarrow \frac{b1 (-1 + b2^2) m}{(-b1 + b2) \sqrt{1 - b2^2}} \right\} \right\}$$

```
sol /. {m -> 3.67 * 10^-27, b2 -> 0.983, b1 -> -0.772}
```

```
{ {m1 -> 1.3066 * 10^-27, m2 -> 2.96409 * 10^-28} }
```

### Question 4

L'énergie cinétique d'un proton dans un accélérateur de particules vaut  $n$  GeV. Que vaut sa quantité de mouvement ? Que vaut sa vitesse ?

A partir de l'énergie cinétique et de la masse du proton on peut exprimer son énergie totale  $E$  ( $E =$  Énergie cinétique + Énergie de masse) puis trouver sa vitesse  $\beta$  et  $v$ , et finalement sa quantité de mouvement  $p$  ( $p = \beta E$ )

```
sol = Solve[m/Sqrt[1 - b^2] == m + ecin, b]
```

$$\left\{ \left\{ b \rightarrow -\frac{\sqrt{ecin} \sqrt{2 - \frac{ecin}{ecin+m}}}{\sqrt{ecin+m}} \right\}, \left\{ b \rightarrow \frac{\sqrt{ecin} \sqrt{2 - \frac{ecin}{ecin+m}}}{\sqrt{ecin+m}} \right\} \right\}$$

```
sol[[2, 1, 2]] /. {ecin -> 100, m -> 0.938} (* énergie en GeV *)
```

```
% * c /. c -> 2.99792458 * 10^8
```

```
m/Sqrt[1 - b^2] * % /. {m -> 1.67 * 10^-27., b -> %%}
```

```
0.999957
```

```
2.9978 * 10^8
```

```
5.38729 * 10^-17
```

### Question 5

Des électrons sont accélérés à une énergie de 15 GeV dans le SLAC (Stanford Linear Accelerator) qui mesure 3 km de long. Que vaut  $\beta$  pour ces électrons ? Quelle est leur vitesse ? Que est la longueur de l'accélérateur observé depuis un référentiel en translation parallèlement à l'accélérateur à la vitesse de ces électrons ?

La vitesse s'obtient à partir de l'expression de l'énergie totale :

```
sol = Solve[m/Sqrt[1 - b^2] == e, b]
```

$$\left\{ \left\{ b \rightarrow -\sqrt{1 - \frac{m^2}{e^2}} \right\}, \left\{ b \rightarrow \sqrt{1 - \frac{m^2}{e^2}} \right\} \right\}$$

```
N[sol[[2, 1, 2]] /. {e -> 15 000, m -> 511/1000}, 13]
```

```
0.9999999994197
```

```
% * c /. c -> 299 792 458
```

```
2.997924578260 * 10^8
```

```
1/Sqrt[1 - b^2] /. b -> %%
```

```
2.935 * 10^4
```

```
1 * Sqrt[1 - b^2] /. {1 -> 3000, b -> %%}
```

```
0.10220
```

## Question 6

Une particule instable de masse  $m = n m_e$  se désintègre en un muon  $m_\mu = 206 m_e$  et un antineutrino ( $m_{\text{antineutrino}} \approx 0$ ). Que valent les énergies cinétiques du muon et de l'antineutrino ?

L'énergie totale et la quantité de mouvement se conservent, ce qui permet d'écrire deux équations qu'on résout par rapport à  $\beta_1$  et  $\beta_2$  :

```
sol = Solve[{m == m1 / Sqrt[1 - b1^2] + m2 / Sqrt[1 - b2^2],
  m1 / Sqrt[1 - b1^2] * b1 + m2 / Sqrt[1 - b2^2] * b2 == 0}, {b1, b2}]
```

$$\left\{ \left\{ b1 \rightarrow \frac{1}{m^2 + m1^2 - m2^2} \left( - \left( m^2 \sqrt{(m^4 - 2 m^2 m1^2 + m1^4 - 2 m^2 m2^2 - 2 m1^2 m2^2 + m2^4)} \right) / \left( \sqrt{(m^4 - 2 m^2 m1^2 + m1^4 + 2 m^2 m2^2 - 2 m1^2 m2^2 + m2^4)} \right) \right) + \left( m1^2 \sqrt{(m^4 - 2 m^2 m1^2 + m1^4 - 2 m^2 m2^2 - 2 m1^2 m2^2 + m2^4)} \right) / \left( \sqrt{(m^4 - 2 m^2 m1^2 + m1^4 + 2 m^2 m2^2 - 2 m1^2 m2^2 + m2^4)} \right) - \left( m2^2 \sqrt{(m^4 - 2 m^2 m1^2 + m1^4 - 2 m^2 m2^2 - 2 m1^2 m2^2 + m2^4)} \right) / \left( \sqrt{(m^4 - 2 m^2 m1^2 + m1^4 + 2 m^2 m2^2 - 2 m1^2 m2^2 + m2^4)} \right) \right), b2 \rightarrow \left( \sqrt{(m^4 - 2 m^2 m1^2 + m1^4 - 2 m^2 m2^2 - 2 m1^2 m2^2 + m2^4)} \right) / \left( \sqrt{(m^4 - 2 m^2 m1^2 + m1^4 + 2 m^2 m2^2 - 2 m1^2 m2^2 + m2^4)} \right) \right\}, \left\{ b1 \rightarrow \frac{1}{m^2 + m1^2 - m2^2} \left( \left( m^2 \sqrt{(m^4 - 2 m^2 m1^2 + m1^4 - 2 m^2 m2^2 - 2 m1^2 m2^2 + m2^4)} \right) / \left( \sqrt{(m^4 - 2 m^2 m1^2 + m1^4 + 2 m^2 m2^2 - 2 m1^2 m2^2 + m2^4)} \right) - \left( m1^2 \sqrt{(m^4 - 2 m^2 m1^2 + m1^4 - 2 m^2 m2^2 - 2 m1^2 m2^2 + m2^4)} \right) / \left( \sqrt{(m^4 - 2 m^2 m1^2 + m1^4 + 2 m^2 m2^2 - 2 m1^2 m2^2 + m2^4)} \right) + \left( m2^2 \sqrt{(m^4 - 2 m^2 m1^2 + m1^4 - 2 m^2 m2^2 - 2 m1^2 m2^2 + m2^4)} \right) / \left( \sqrt{(m^4 - 2 m^2 m1^2 + m1^4 + 2 m^2 m2^2 - 2 m1^2 m2^2 + m2^4)} \right) \right), b2 \rightarrow - \left( \left( \sqrt{(m^4 - 2 m^2 m1^2 + m1^4 - 2 m^2 m2^2 - 2 m1^2 m2^2 + m2^4)} \right) / \left( \sqrt{(m^4 - 2 m^2 m1^2 + m1^4 + 2 m^2 m2^2 - 2 m1^2 m2^2 + m2^4)} \right) \right) \right\} \right\}$$

```
sol /. {m -> 260 * 0.511, m1 -> 206 * 0.511, m2 -> 0}
```

```
{ {b1 -> -0.228689, b2 -> 1.}, {b1 -> 0.228689, b2 -> -1.} }
```

Introduisons ces valeurs de  $\beta$  dans l'expression de l'énergie cinétique :

```
m1 (1 / Sqrt[1 - b1^2] - 1) /. sol /.
```

```
{m -> 260 * 0.511, m1 -> 206 * 0.511, m2 -> 0} /. m1 -> 206 * 0.511
```

```
{2.86553, 2.86553}
```

L'énergie cinétique de l'antineutrino s'obtient en soustrayant de l'énergie totale l'énergie de masse et l'énergie cinétique du muon :

```
(260 - 206) * 0.511 - %[[1]]
```

```
24.7285
```