Énergie

Exercices extraits de l'ouvrage *Mécanique* de J.-A. Monard.
Éditeur : centrale d'achats de la ville de Bienne, Rennweg 62, 2501 Bienne, 1977.

Problème 1

Un bloc de bois de masse m est lancé à la vitesse v_0 sur une planche dont l'inclinaison vaut α. L'objet monte. Il franchit une distance d avant de s'arrêter.
a) Exprimez la force de frottement qu'il subit en fonction de m, v_0 et α.
b) Calculez cette force pour les valeurs suivantes : m = 2 kg, v_0 = 3 m/s et α = 20°, d = 0.8 m.
c) Quelle distance le bloc franchirait-il s'il ne subissait aucun frottement ?

Problème 2

La piste d'un toboggan a une longueur l et une dénivellation h. Un enfant dont la masse vaut m descend sur ce toboggan et subit une force de frottement F dont la grandeur est constante. La vitesse initiale de l'enfant vaut v_0.
a) Exprimez la vitesse finale de l'enfant en fonction des quantités connues.
b) Calculez cette vitesse finale pour les valeurs : l = 5 m, h = 2 m, m = 20 kg, F = 70 N et v_0 = 0.2 m/s.

Problème 3

Au haut d'une pente, à l'altitude h_1, un cycliste a une vitesse v_1. Un peu plus loin, à l'altitude h_2, il a une vitesse v_2.
a) Exprimez l'énergie mécanique du cycliste lorsqu'il se trouve aux altitudes h_1 et h_2.
b) Calculez cette énergie mécanique à ces deux altitudes pour les valeurs suivantes : h_1 = 453 m, v_1 = 2 m/s,
h_2 = 427 m, v_2 = 12 m/s.
c) Donnez, selon vos résultats, une conclusion plausible.

Problème 4

Vous lancez un objet à la vitesse v_0 depuis une fenêtre située à une hauteur h.
a) Exprimez la vitesse v de l'objet lorsqu'il arrive au sol - en négligeant le frottement - dans les trois cas suivants :
• vous lancez l'objet horizontalement;
• vous lancez l'objet verticalement vers le haut;
• vous lancez l'objet verticalement vers le bas.
b) Calculez cette vitesse v pour les valeurs suivantes : h = 20 m, v_0 = 10 m/s.

Problème 5

Un pendule simple de masse m et de longueur l part d'une position dans laquelle le fil forme un angle α avec la verticale.
a) Exprimez la vitesse maximale du pendule.
b) Exprimez sa vitesse lorsque le fil forme un angle β avec la verticale.
c) Calculez ces deux vitesses pour les valeurs suivantes : m = 50 g, l = 40 cm, α =60°, β = 30°.

Problème 6

Les stations extrêmes d'un funiculaire sont aux altitudes h_1 et h_2. La voie a une pente constante et une longueur l. Une voiture de masse m descend à la vitesse v. Soudain, le câble qui la retient se casse.

a) Exprimez la vitesse de la voiture lorsqu'elle a parcouru une distance d depuis l'endroit où la rupture a eu lieu en supposant qu'il n'y a pas de frottement.
b) Exprimez la vitesse de la voiture lorsqu'elle a parcouru une distance d depuis l'endroit où la rupture a eu lieu en supposant que la force de frottement qu'elle subit est égale en grandeur à k fois son poids.
c) Exprimez la force de freinage que devrait subir la voiture pour qu'elle s'arrête sur cette distance d en tenant compte de la force de frottement.
d) Calculez ces deux vitesses ainsi que la force de freinage nécessaire pour s'arrêter sur une distance d pour les valeurs suivantes : h_1 = 500 m, h_2 = 900 m, l = 2 km, m = 4000 kg, k = 5%, v = 18 km/h, d = 36 m.

Problème 7

Sous le point d'attache d'un pendule de longueur L se trouve une tige horizontale, à une distance d du point d'attache. Cette tige est perpendiculaire au plan dans lequel le pendule oscille. Les angles formés par le fil lorsque le pendule est aux extrémités de sa trajectoire sont α et β ($\alpha < \beta$).
a) Exprimez β en fonction de α, L et d.
b) Calculez β pour les valeurs suivantes : $\alpha = 45°$, L = 80 cm et d = 40 cm.

Problème 8

a) Exprimez la vitesse de libération d'un astre de masse M et de rayon R.
b) Calculez la vitesse de libération de la Terre, de Mars et de la Lune.

Problème 9

a) Exprimez la vitesse de libération pour des satellites situés à des altitudes h_1, h_2 et h_3 au-dessus de la Terre.
b) Calculez ces vitesses de libération pour les valeurs suivantes : h_1 = 1000 km, h_2 = 2000 km et h_3 = 3000 km.

Problème 10

Un objet est lancé verticalement depuis la surface de la Terre à une vitesse v_0.
a) Exprimez l'altitude qu'il atteint si le frottement est négligé.
b) Calculez cette altitude pour les deux vitesses initiales suivantes : v_{01} = 5 km/s et : v_{02} =10 km/s.

Problème 11

Un objet est lâché avec une vitesse initiale nulle d'un point situé à une distance r du centre de la Terre.
a) Exprimez sa vitesse lorsqu'il arrive sur Terre si le frottement est négligé.
b) Calculez cette vitesse pour les valeurs suivantes : h_1 = 40000 km, h_2 = 20000 km.

Problème 12

Lorsqu'il est contracté par deux forces opposées de grandeur F, un ressort se raccourcit de x. Vous lui faites subir une contraction de 3x et vous le maintenez dans cet état au moyen d'un fil. Vous le placez horizontalement en appuyant une de ses extrémités contre le mur. Vous placez devant l'autre extrémité une bille de masse m. Vous coupez le fil pour laisser le ressort se détendre.
a) Exprimez la vitesse à laquelle la bille est expulsée. (Vous négligerez la masse du ressort).
b) Calculez cette vitesse pour les valeurs suivantes : F = 10 N, x = 2 cm, m = 100 g.

Corrigé

Problème I

a) Utilisons le théorème de l'énergie cinétique sur le parcours considéré. L'objet subit 3 forces : son poids $m\vec{g}$, une force de soutien $\vec{N}$ normale au plan et la force de frottement $\vec{F}$. Le travail de la résultante des forces étant égal à la somme des travaux des forces, nous pouvons écrire :

$$A_{12}(m\vec{g}) + A_{12}(\vec{N}) + A_{12}(\vec{F}) = E_{cin}(2) - E_{cin}(1)$$

Le travail du poids $m\vec{g}$ (force conservative) vaut $-mgh$. Le travail de la force de soutien $\vec{N}$ est nul car cette force est perpendiculaire au chemin et le travail de la force de frottement $\vec{F}$ vaut $-Fd$ car l'angle entre la force et le déplacement vaut 180°. Nous obtenons donc :

$$- mgd \sin\alpha - Fd = 0 - \frac{m v_0^2}{2}$$

a) Résolvons cette équation par rapport à F :

```
sol1 = Solve[-m*g*d*Sin[α] - F*d == -m*v0^2/2, F]
```

$$\left\{\left\{F \to \frac{m\,v0^2 - 2\,d\,g\,m\,\mathrm{Sin}[\alpha]}{2\,d}\right\}\right\}$$

b) Calculons cette force - en N - pour les valeurs données :

```
sol1[[1, 1, 2]] /. {g → 9.81, m → 2, v0 → 3, α → 20 Degree, d → 0.8}
```

4.53956

c) On obtient la distance parcourue - en m - sans frottement en posant F = 0 N et en résolvant l'équation par rapport à d :

```
sol1c = Solve[-m*g*d*Sin[α] - F*d == -m*v0^2/2, d];
sol1c[[1, 1, 2]] /. {g → 9.81, m → 2, v0 → 3, α → 20 Degree, F → 0}
```

1.34119

Problème 2

a) Utilisons le théorème de l'énergie cinétique qui affirme que le travail de la résultante des forces qui agissent sur le mobile est égal à la variation d'énergie cinétique de celui-ci. En résolvant cette équation par rapport à v, on obtient :

```
sol2 = Solve[m*g*h - F*l == m*v^2/2 - m*v0^2/2, v]
```

$$\left\{\left\{v \to -\frac{1}{\sqrt{m}}\left(\sqrt{\left(-2\,F\,l + 2\,g\,h\,m + m\,v0^2\right)}\right)\right\}, \left\{v \to \frac{\sqrt{-2\,F\,l + 2\,g\,h\,m + m\,v0^2}}{\sqrt{m}}\right\}\right\}$$

b) Calculons cette vitesse finale en m/s pour les valeurs indiquées :

```
sol2[[2, 1, 2]] /. {g → 9.81, l → 5, h → 2, m → 20, F → 70, v0 → 0.2}
```

2.06882

Problème 3

a) Exprimons l'énergie mécanique du mobile aux deux positions

```
e1 = m * g * h1 + m * v1 ^ 2 / 2
e2 = m * g * h2 + m * v2 ^ 2 / 2
```

$$g\,h1\,m + \frac{m\,v1^2}{2}$$

$$g\,h2\,m + \frac{m\,v2^2}{2}$$

b) Calculons ces énergies pour les valeurs données :

```
e1 /. {g → 9.81, m → 80, h1 → 453, v1 → 2, h2 → 427, v2 → 12}
```

355 674.

```
e2 /. {g → 9.81, m → 80, h1 → 453, v1 → 2, h2 → 427, v2 → 12}
```

340 870.

c) L'énergie mécanique du mobile a diminué. Il a donc subit un force non conservative :

```
e1 – e2 /. {g → 9.81, m → 80, h1 → 453, v1 → 2, h2 → 427, v2 → 12}
```

14 804.8

Problème 4

Vous lancez un objet à la vitesse v_0 depuis une fenêtre située à une hauteur *h.*
a) Exprimez la vitesse *v* de l'objet lorsqu'il arrive au sol - en négligeant le frottement - dans les trois cas suivants :
• vous lancez l'objet horizontalement;
• vous lancez l'objet verticalement vers le haut;
• vous lancez l'objet verticalement vers le bas.
b) Calculez cette vitesse *v* pour les valeurs suivantes : h = 20 m, v_0 = 10 m/s.

a) Le mobile ne subit qu'une seule force, qui est conservative, son poids. Utilisons le théorème de l'énergie mécanique pour exprimer sa vitesse lorsqu'il arrive au sol :

```
sol4 = Solve[m * g * h + m * v0 ^ 2 / 2 == m * v ^ 2 / 2, v]
```

$$\left\{\left\{v \to -\sqrt{2\,g\,h + v0^2}\right\}, \left\{v \to \sqrt{2\,g\,h + v0^2}\right\}\right\}$$

b) Calculons cette vitesse - en m/s - pour les valeurs données :

```
sol4[[2, 1, 2]] /. {g → 9.81, h → 20, v0 → 10}
```

22.1901

N. B. Chose remarquable, cette vitesse ne dépend pas de l'angle de tir.

Problème 5

Un pendule simple de masse *m* et de longueur *l* part d'une position dans laquelle le fil forme un angle α avec la verticale.
a) Exprimez la vitesse maximale du pendule.
b) Exprimez sa vitesse lorsque le fil forme un angle β avec la verticale.
c) Calculez ces deux vitesses pour les valeurs suivantes : m = 50 g, l = 40 cm, α = 60°, β = 30°.

a) Fixons l'origine du système de référence au point le plus bas. Lorsque le fil forme un angle α, l'objet se trouve à une hauteur $l(1 - \cos\alpha)$ et sa vitesse est nulle. Égalons l'énergie mécanique du pendule en deux positions et résolvons par rapport à *v* :

```
sol5 = Solve[m * g * l (1 - Cos[α]) == m * v^2 / 2, v]
```

$$\left\{\left\{v \to -\sqrt{2}\,\sqrt{g\,l - g\,l\,\mathrm{Cos}[\alpha]}\right\},\ \left\{v \to \sqrt{2}\,\sqrt{g\,l - g\,l\,\mathrm{Cos}[\alpha]}\right\}\right\}$$

```
sol5[[2, 1, 2]]
```

$$\sqrt{2}\,\sqrt{g\,l - g\,l\,\mathrm{Cos}[\alpha]}$$

b) Lorsque le fil forme un angle β, il a encore de l'énergie potentielle de gravitation. Égalons l'énergie mécanique pour les deux positions α et β :

```
sol5b = Solve[m * g * l (1 - Cos[α]) == m * g * l (1 - Cos[β]) + m * v^2 / 2, v]
```

$$\left\{\left\{v \to -\sqrt{2}\,\sqrt{(-g\,l\,\mathrm{Cos}[\alpha] + g\,l\,\mathrm{Cos}[\beta])}\right\},\ \left\{v \to \sqrt{2}\,\sqrt{(-g\,l\,\mathrm{Cos}[\alpha] + g\,l\,\mathrm{Cos}[\beta])}\right\}\right\}$$

```
sol5b[[2, 1, 2]]
```

$$\sqrt{2}\,\sqrt{-g\,l\,\mathrm{Cos}[\alpha] + g\,l\,\mathrm{Cos}[\beta]}$$

c) Calculons ces deux vitesses - en m/s - pour les valeurs données :

```
sol5[[2, 1, 2]] /. {g → 9.81, m → 0.05, l → 0.4, α → 60 Degree}
```

1.98091

```
sol5b[[2, 1, 2]] /. {g → 9.81, m → 0.05, l → 0.4, α → 60 Degree, β → 30 Degree}
```

1.69487

Problème 6

a) S'il n'y a pas de frottement, nous pouvons utiliser le théorème de l'énergie mécanique :

```
sol6 = Solve[m * g * d * (h2 - h1) / l + m * v0^2 / 2 == m * v^2 / 2, v]
```

$$\left\{\left\{v \to -\sqrt{\left(-\frac{2\,d\,g\,h1}{l} + \frac{2\,d\,g\,h2}{l} + v0^2\right)}\right\},\ \left\{v \to \sqrt{\left(-\frac{2\,d\,g\,h1}{l} + \frac{2\,d\,g\,h2}{l} + v0^2\right)}\right\}\right\}$$

b) S'il y a du frottement, nous utilisons le théorème de l'énergie cinétique :

```
sol6b = Solve[(m * g * (h2 - h1) / l - k * m * g) d == m * v^2 / 2 - m * v0^2 / 2, v] // Simplify
```

$$\left\{\left\{v \to -\sqrt{\left(\frac{1}{l}\left(-2\,d\,g\,(h1 - h2 + k\,l) + l\,v0^2\right)\right)}\right\},\ \left\{v \to \sqrt{\left(\frac{1}{l}\left(-2\,d\,g\,(h1 - h2 + k\,l) + l\,v0^2\right)\right)}\right\}\right\}$$

c) Posons que le travail de la force résultante qui agit sur le mobile est égal à sa variation d'énergie cinétique et résolvons par rapport à la force de frottement F :

```
sol6c = Solve[(m * g * (h2 - h1) / l - F) d == m * v0^2 / 2, F]
```

$$\left\{\left\{F \to \frac{1}{2\,d\,l}\left(-2\,d\,g\,h1\,m + 2\,d\,g\,h2\,m - l\,m\,v0^2\right)\right\}\right\}$$

d) Calculons les deux vitesses en [m/s] et la force de freinage en N :

```
sol6[[2, 1, 2]] /. {g → 9.81, h1 → 500, h2 → 900, l → 2000, v0 → 18 / 3.6, d → 36}
sol6b[[2, 1, 2]] /.
 {g → 9.81, h1 → 500, h2 → 900, l → 2000, k → 0.05, v0 → 18 / 3.6, d → 36}
sol6c[[1, 1, 2]] /. {g → 9.81, h1 → 500, h2 → 900,
   l → 2000, m → 4000, v0 → 18 / 3.6, d → 36}
```

12.8943

11.4433

6459.11

Problème 7

Sous le point d'attache d'un pendule de longueur L se trouve une tige horizontale, à une distance d du point d'attache. Cette tige est perpendiculaire au plan dans lequel le pendule oscille. Les angles formés par le fil lorsque le pendule est aux extrémités de sa trajectoire sont α et β ($\alpha < \beta$).
a) Exprimez β en fonction de α, L et d.
b) Calculez β pour les valeurs suivantes : $\alpha = 45°$, $L = 80$ cm et $d = 40$ cm.

a) On obtient β en résolvant l'équation qui égale les énergies mécaniques du pendule pour les angles α et β :

```
sol7 = Solve[m * g * l (1 - Cos[α]) == m * g (l - d) (1 - Cos[β]), β]
```

```
Solve::ifun :
 Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found;
   use Reduce for complete solution information. More…
```

$$\left\{\left\{\beta \to -\text{ArcCos}\left[\frac{d - l\,\text{Cos}[\alpha]}{d - l}\right]\right\}, \left\{\beta \to \text{ArcCos}\left[\frac{d - l\,\text{Cos}[\alpha]}{d - l}\right]\right\}\right\}$$

b) Calculons l'angle β - en radian et en degré - pour les valeurs données :

```
sol7[[2, 1, 2]] /. {α → 45 Degree, l → 0.8, d → 0.4}
% / Degree
```

1.14372

65.5302

Problème 8

a) On obtient la vitesse de libération d'un astre en égalant les énergies mécaniques de l'objet à la surface de l'astre et à l'infini, où on pose que sa vitesse est nulle :

```
sol8 = Solve[v0 ^ 2 / 2 - G * M / R == 0, v0]
```

$$\left\{\left\{v0 \to -\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{G}\,\sqrt{M}}{\sqrt{R}}\right\}, \left\{v0 \to \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{G}\,\sqrt{M}}{\sqrt{R}}\right\}\right\}$$

b) Calculons cette vitesse de libération en m/s pour les astres donnés :

```
sol8[[2, 1, 2]] /. {G → 6.67 * 10 ^ -11, M → 5.97 * 10 ^ 24, R → 6.37 * 10 ^ 6}
sol8[[2, 1, 2]] /. {G → 6.67 * 10 ^ -11, M → 0.1074 * 5.95 * 10 ^ 24, R → 0.532 * 6.37 * 10 ^ 6}
sol8[[2, 1, 2]] /. {G → 6.67 * 10 ^ -11, M → 7.35 * 10 ^ 22, R → 1.74 * 10 ^ 6}
```

11 181.4

5015.49

2373.82

Problème 9

a) La vitesse de libération lorsque l'objet se trouve à l'altitude h est donnée par :

```
sol9 = Solve[v0 ^ 2 / 2 - G * M / (R + h) == 0, v0]
```

$$\left\{\left\{v0 \to -\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{G}\,\sqrt{M}}{\sqrt{h + R}}\right\}, \left\{v0 \to \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{G}\,\sqrt{M}}{\sqrt{h + R}}\right\}\right\}$$

b) Le calcul fournit respectivement les valeurs suivantes, en m/s :

```
sol9[[2, 1, 2]] /. {G → 6.67 * 10^-11, M → 5.97 * 10^24, R → 6.37 * 10^6, h → 10^6}
sol9[[2, 1, 2]] /. {G → 6.67 * 10^-11, M → 5.97 * 10^24, R → 6.37 * 10^6, h → 2 * 10^6}
sol9[[2, 1, 2]] /. {G → 6.67 * 10^-11, M → 5.97 * 10^24, R → 6.37 * 10^6, h → 3 * 10^6}
```

10 395.2

9754.44

9219.24

Problème 10

Un objet est lancé verticalement depuis la surface de la Terre à une vitesse v_0.
a) Exprimez l'altitude qu'il atteint si le frottement est négligé.
b) Calculez cette altitude pour les deux vitesses initiales suivantes : v_{01} = 5 km/s et : v_{02} =10 km/s.

a) L'énergie mécanique au départ et à l'altitude *h* est la même s'il n'y a pas de frottement :

```
sol10 = Solve[v0^2 / 2 - G * M / R == -G * M / (R + h), h]
```

$$\left\{\left\{h \to -\frac{R^2\, v0^2}{-2\, G\, M + R\, v0^2}\right\}\right\}$$

b) Calculons ces altitudes en m pour les deux vitesses initiales données :

```
sol10[[1, 1, 2]] /. {G → 6.67 * 10^-11, M → 5.97 * 10^24, R → 6.37 * 10^6, v0 → 5000}
sol10[[1, 1, 2]] /. {G → 6.67 * 10^-11, M → 5.97 * 10^24, R → 6.37 * 10^6, v0 → 10 000}
```

1.59213×10^6

2.54563×10^7

Problème 11

Un objet est lâché avec une vitesse initiale nulle d'un point situé à une altitude *h*.
a) Exprimez sa vitesse lorsqu'il arrive sur Terre si le frottement est négligé.
b) Calculez cette vitesse pour les valeurs suivantes : h_1 = 40000 km, h_2 = 20000 km.

a) L'énergie mécanique au départ et à l'arrivée est la même s'il n'y a pas de frottement :

```
sol11 = Solve[-G * M / (R + h) == v^2 / 2 - G * M / R, v]
```

$$\left\{\left\{v \to -\sqrt{2}\sqrt{\frac{G\, M}{R} - \frac{G\, M}{h + R}}\right\}, \left\{v \to \sqrt{2}\sqrt{\frac{G\, M}{R} - \frac{G\, M}{h + R}}\right\}\right\}$$

```
sol11[[2, 1, 2]]
```

$$\sqrt{2}\sqrt{\frac{G\, M}{R} - \frac{G\, M}{h + R}}$$

b) Calculons cette vitesse en m/s pour les valeurs de *h* données :

```
sol11[[2, 1, 2]] /. {G → 6.67 * 10^-11, M → 5.97 * 10^24, R → 6.37 * 10^6, h → 4 * 10^7}
sol11[[2, 1, 2]] /. {G → 6.67 * 10^-11, M → 5.97 * 10^24, R → 6.37 * 10^6, h → 2 * 10^7}
```

10 385.

9737.68

Problème 12

Lorsqu'il est contracté par deux forces opposées de grandeur *F*, un ressort se raccourcit de *x*.
Vous lui faites subir une contraction de *nx* et vous le maintenez dans cet état au moyen d'un fil.

Vous le placez horizontalement en appuyant une de ses extrémités contre le mur. Vous placez devant l'autre extrémité une bille de masse *m*. Vous coupez le fil pour laisser le ressort se détendre.

a) Exprimez la vitesse à laquelle la bille est expulsée. (Vous négligerez la masse du ressort).

b) Calculez cette vitesse pour les valeurs suivantes : *F* = 10 N, *n* = 3, *x* = 2 cm, *m* = 100 g.

a) L'énergie mécanique du système (bille + ressort) lorsque le ressort est contracté est la même que celle du système lorsque la bille est expulsée. Résolvons cette équation par rapport à *v* :

```
sol12 = Solve[k (n * x)^2 / 2 == m * v^2 / 2, v]
```

$$\left\{\left\{v \to -\frac{\sqrt{k}\, n\, x}{\sqrt{m}}\right\}, \left\{v \to \frac{\sqrt{k}\, n\, x}{\sqrt{m}}\right\}\right\}$$

b) Calculons cette vitesse en m/s pour les valeurs données :

```
sol12[[2, 1, 2]] /. {F → 10, x → 0.02, n → 3, m → 0.1, k → 500}
```

```
4.24264
```