Le bateau, l'enfant et le colibri

(Ou le frottement statique d'une corde enroulée autour d'un cylindre)

Par Pascal Rebetez

Mars 2007

Comme chaque après-midi, Zeng, un jeune habitant d'une petite île isolée d'Asie du Sud-est, était assis sur la plage à l'ombre d'un cocotier et admirait pensivement la mer agitée. Perché sur son épaule, son inséparable colibri lui tenait compagnie.

Ce jour là cependant, quelque chose d'inhabituel attira l'attention du garçon. À quelque distance de lui, un homme tentait d'amarrer son bateau en coinçant une corde sous une pierre trouvée sur le sable. Il s'agissait d'un commerçant qui avait accosté là, en vue de vendre sa marchandise aux habitants de l'île.

- Voilà une bien étrange façon d'amarrer votre embarcation, dit l'enfant en s'approchant de lui.

- Ecoute petit, lui répondit le marchand quelque peu agacé, je suis persuadé qu'Eol en personne a élu domicile sur cette île perdue, tant la mer y est agitée. J'ai tenté de jeter l'ancre mais elle se décroche obstinément. J'ai ensuite essayé de nouer la corde au tronc d'un cocotier, mais elle est malheureusement trop grosse et manque de souplesse pour parvenir à y faire un nœud. Je ne vois donc pas d'autres solutions que de la coincer sous la plus grosse pierre que je puisse trouver sur cet îlot !

L'enfant contempla le commerçant un bref instant et lui dit :

- Je connais un moyen pour amarrer ton bateau, qui ne nécessite pas plus de force que celle qu'il me faut pour soutenir le petit compagnon que j'ai sur l'épaule, même si le vent redoublait de violence.

À ces mots, le colibri hocha la tête.

- Bien, répondit l'homme avec ironie. Puisque tu es si malin, je te propose de mettre en œuvre tes idées géniales. Le soleil est déjà bas sur l'horizon et le ciel commence à rougeoyer. Je te laisse jusqu'à la tombée de la nuit pour amarrer mon bateau. Si tu n'y parviens pas, tu en déchargeras toute la marchandise et la transporteras jusqu'au village. Tu m'éviteras ainsi un pénible travail.

- Et si j'y parviens ? demanda Zeng, l'œil malicieux.

- Tu auras droit à une partie de la marchandise que j'apporte sur cette île.

L'enfant paru satisfait.

Il saisit alors la corde, la tira jusqu'au cocotier le plus proche et l'enroula de quelques tours autour du tronc. Tout sourire, il regarda l'homme en tenant délicatement l'extrémité de la corde entre le pouce et l'indexe. L'embarcation tractait la corde par violentes secousses au rythme des vagues, mais l'extrémité que tenait le garçon, ne bougeait pas d'un cheveu.

Médusé, l'adulte s'en voulait terriblement de n'avoir pas eu cette idée, aussi simple que lumineuse ; utiliser le frottement entre la corde et le tronc pour compenser la traction du bateau.

- Vas te servir et disparais, maugréa le marchand.

Zeng peut-il réellement retenir ce bateau avec quelque tour de cordes autour d'un tronc ? Nous allons dans la suite étudier cette question. Plus précisément, nous considérons une corde dont les extrémités sont soumises à des tractions différentes et cherchons le nombre minimal de fois qu'il faut l'enrouler autour d'un cylindre, pour qu'elle ne glisse pas sur celui-ci. La démarche choisie pour résoudre ce problème mène à une équation dont la solution s'obtient par le calcul de la limite d'un terme de cette équation, ce terme dépendant d'un nombre entier.

Nous sommes dans la situation d'une corde à l'équilibre statique enroulée d'un angle θ autour d'un cylindre. Une extrémité de la corde est soumise à une force d'intensité F_1 et l'autre extrémité, à une force d'intensité F, supposée supérieure à F_1 (c.f. fig. 1).

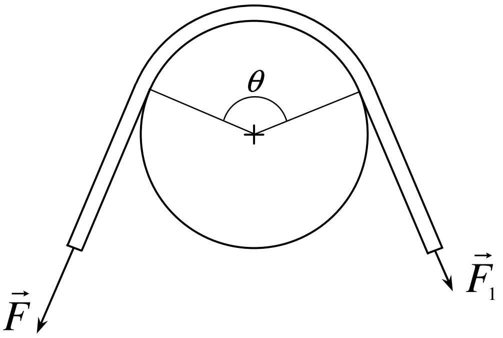

Fig.1 : Corde à l'équilibre statique enroulée d'un angle θ autour d'un cylindre.

Chaque point de la corde en contact avec le cylindre, est soumis à une force de tension d'une part et à une force de frottement exercée par le cylindre, d'autre part. La situation d'équilibre impose que la résultante des forces exercées en chaque point de la corde, soit nulle.

La corde est en contact avec le cylindre le long d'un arc de cercle. Nous approximons cet arc de cercle par une ligne polygonale constituée de n segments de mêmes longueurs. L'angle au centre de chacun de ces segments est donc égal à $\dfrac{\theta}{n}$ (c.f. fig. 2).

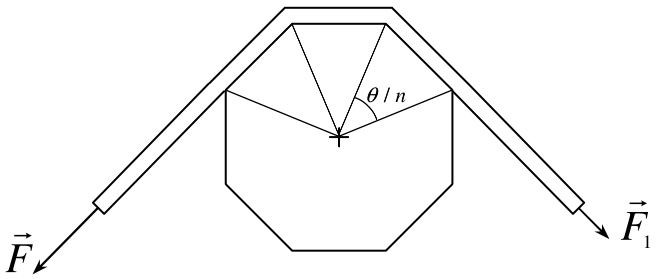

Fig.2 : Approximation de l'arc de cercle par une ligne polygonale de n segments de mêmes longueurs.

Nous appliquons la condition d'équilibre de la corde à son premier point de contact avec la ligne polygonale, du côté de la force $\vec{F}$; l'intensité de cette force est égale à l'intensité de la force qui tire la corde en ce point, dans le sens opposé à celui de $\vec{F}$. L'intensité de cette force opposée se trouve en étudiant successivement la manière dont se transmet la force $\vec{F}_1$, d'un segment à l'autre de la ligne polygonale (c.f. fig. 3). On voit sur cette figure que le triangle QOP est semblable à celui formé par le vecteur force $\vec{F}_1$ et ses composantes dans les directions parallèle et perpendiculaire au 2ème segment ($\vec{F}_{1_{//}}$ et $\vec{F}_{1_{\perp}}$). Par conséquent, l'angle QOP (qui est égal à $\dfrac{\theta}{n}$) est égal à l'angle (aigu) formé par les vecteurs $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_{1_{//}}$.

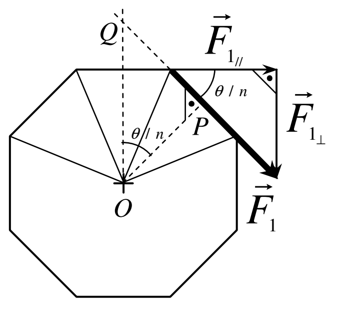

Fig.3 : Transmission de la force de traction d'un segment à l'autre.

Sur le 1er segment de la corde, l'intensité de la force parallèle à celui-ci est égale à F_1.

Le 2ème segment de la corde est soumis à la composante de $\vec{F}_1$ parallèle à celui-ci ainsi qu'à sa composante perpendiculaire, laquelle contribue à la force de frottement statique ($\vec{F}_f$) subie par la corde. L'intensité de cette force de frottement est proportionnelle à la composante perpendiculaire de $\vec{F}_1$:

$$F_f = \mu F_{1_\perp}$$

où

$$F_{1_\perp} = F_1 \sin\frac{\theta}{n}$$

et μ est le coefficient de frottement statique.

D'où

$$F_f = \mu F_1 \sin\frac{\theta}{n}$$

L'intensité de la composante de $\vec{F}_1$ parallèle au 2ème segment ($F_{1_{//}}$), est égale à :

$$F_{1_{//}} = F_1 \cos\frac{\theta}{n}$$

L'intensité de la résultante des forces s'exerçant parallèlement au 2ème segment (F_2) dans le sens de $\vec{F}_1$, est donc donnée par :

$$\begin{aligned} F_2 &= F_f + F_{1_{//}} \\ &= \mu F_1 \sin\frac{\theta}{n} + F_1 \cos\frac{\theta}{n} \\ &= \left(\mu \sin\frac{\theta}{n} + \cos\frac{\theta}{n}\right) F_1 \end{aligned}$$

L'intensité de la résultante des forces s'exerçant parallèlement au 3ème segment (F_3) s'obtient comme précédemment en décomposant la force $\vec{F}_2$, dans les directions parallèle et perpendiculaire au 3ème segment. On obtient ainsi :

$$
\begin{aligned}
F_3 &= F_f + F_{2_{//}} \\
&= \mu F_2 \sin\frac{\theta}{n} + F_2 \cos\frac{\theta}{n} \\
&= \left(\mu \sin\frac{\theta}{n} + \cos\frac{\theta}{n}\right) F_2 \\
&= \left(\mu \sin\frac{\theta}{n} + \cos\frac{\theta}{n}\right)\left(\mu \sin\frac{\theta}{n} + \cos\frac{\theta}{n}\right) F_1 \\
&= \left(\mu \sin\frac{\theta}{n} + \cos\frac{\theta}{n}\right)^2 F_1
\end{aligned}
$$

En appliquant le même raisonnement pour les autres segments, on obtient :

4ème segment : $F_4 = \left(\mu \sin\frac{\theta}{n} + \cos\frac{\theta}{n}\right)^3 F_1$

5ème segment : $F_5 = \left(\mu \sin\frac{\theta}{n} + \cos\frac{\theta}{n}\right)^4 F_1$

… …

$n$ième segment : $F_n = \left(\mu \sin\frac{\theta}{n} + \cos\frac{\theta}{n}\right)^{n-1} F_1$

Nous pouvons maintenant exprimer la condition d'équilibre statique de la corde, en particulier sur le $n$ième segment, du côté de la force $\vec{F}$.

$$
\begin{aligned}
F &= F_n \\
&= \left(\mu \sin\frac{\theta}{n} + \cos\frac{\theta}{n}\right)^{n-1} F_1 \\
\frac{F}{F_1} &= \left(\mu \sin\frac{\theta}{n} + \cos\frac{\theta}{n}\right)^{n-1}
\end{aligned}
$$

Pour se ramener à la situation réelle, à savoir une corde enroulée autour d'une section circulaire et non polygonale, il faut faire tendre le nombre n de segments vers l'infini. Cela revient donc à calculer la limite du membre de droite de la dernière équation ci-dessus, lorsque n tend vers l'infini. Cette limite existe et vaut :

$$
\lim_{n\to\infty}\left(\mu \sin\frac{\theta}{n} + \cos\frac{\theta}{n}\right)^{n-1} = e^{\mu\theta}
$$

L'équation décrivant l'équilibre statique de la corde enroulée autour d'une section circulaire est donc :

$$
\frac{F}{F_1} = e^{\mu\theta}
$$

Le rapport des intensités des forces de traction exercées aux extrémités de la corde, varie exponentiellement avec le produit du coefficient de frottement et de l'angle d'enroulement de la corde autour du cylindre.

Le graphique ci-contre (fig. 4) représente le rapport des force de traction $\frac{F}{F_1}$ en fonction de l'angle d'enroulement θ de la corde, pour trois valeurs différentes du coefficient de frottement ($\mu = 0{,}4$, $\mu = 0{,}5$ et $\mu = 0{,}8$). Nous voyons que pour un coefficient μ fixé, le rapport des forces augmente très rapidement avec l'angle d'enroulement. De même, pour un angle d'enroulement fixé, le rapport des forces augmente très rapidement avec le coefficient de frottement.

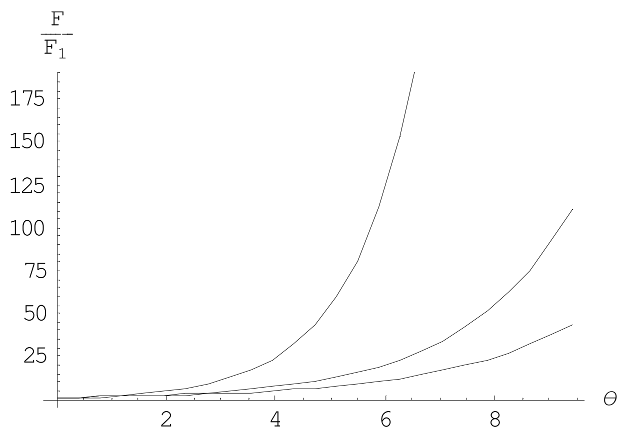

Fig. 4 : Rapport des forces de traction en fonction de l'angle d'enroulement, pour trois valeurs différentes du coefficient de frottement.

Application numérique

Donnons-nous des valeurs numériques et calculons le nombre de fois que Zeng doit enrouler la corde autour du tronc du cocotier, pour retenir le bateau.

- Force de traction de la corde par le bateau : $F = 10000$ N
- La force exercée par Zeng est égale au poids d'un colibri dont la masse est d'environ 5 g : $F_1 = 0{,}05$ N
- Le coefficient de frottement statique entre une corde et du bois vaut : $\mu = 0{,}5$

L'angle d'enroulement θ de la corde autour du tronc vaut :

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{1}{\mu}\ln\left(\frac{F}{F_1}\right)\\ &= \frac{1}{0{,}5}\ln\left(\frac{10000}{0{,}05}\right)\\ &\approx 24\end{aligned}$$

Le nombre de tours (N) correspondant à cet angle (dont l'unité est le radian), est donné par :

$$\begin{aligned}N &= \frac{\theta}{2\pi}\\ &= \frac{24}{2\pi}\\ &\approx 3{,}8\end{aligned}$$

Un peu moins de quatre tours de corde autour du tronc du cocotier permettent à Zeng de retenir le bateau.

Donnons les valeurs (arrondies à l'unité) des rapports des forces de traction $\frac{F}{F_1}$ correspondant à des nombres entier N de tours ($\theta = N2\pi$) :

N	F/F_1
1	23
2	535
3	12 392
4	286 751
5	6 635 624
6	153 552 935
7	3 553 321 281

Trois tours de corde par exemple, suffisent pour compenser une force de traction 12 392 fois supérieure !