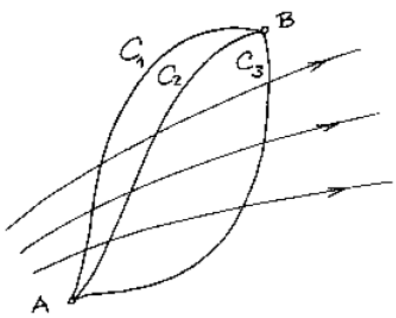
Toute force centrale est conservative
Démonstration

Par Pascal Rebetez – mars 2010
D'après BERKELEY mécanique, cours de physique, volume 1

Définition : Une force exercée par une particule sur une autre, est dite **centrale** si :
- sa grandeur (ou norme ou intensité) ne dépend que de la distance séparant les deux particules
- sa direction passe par les deux particule

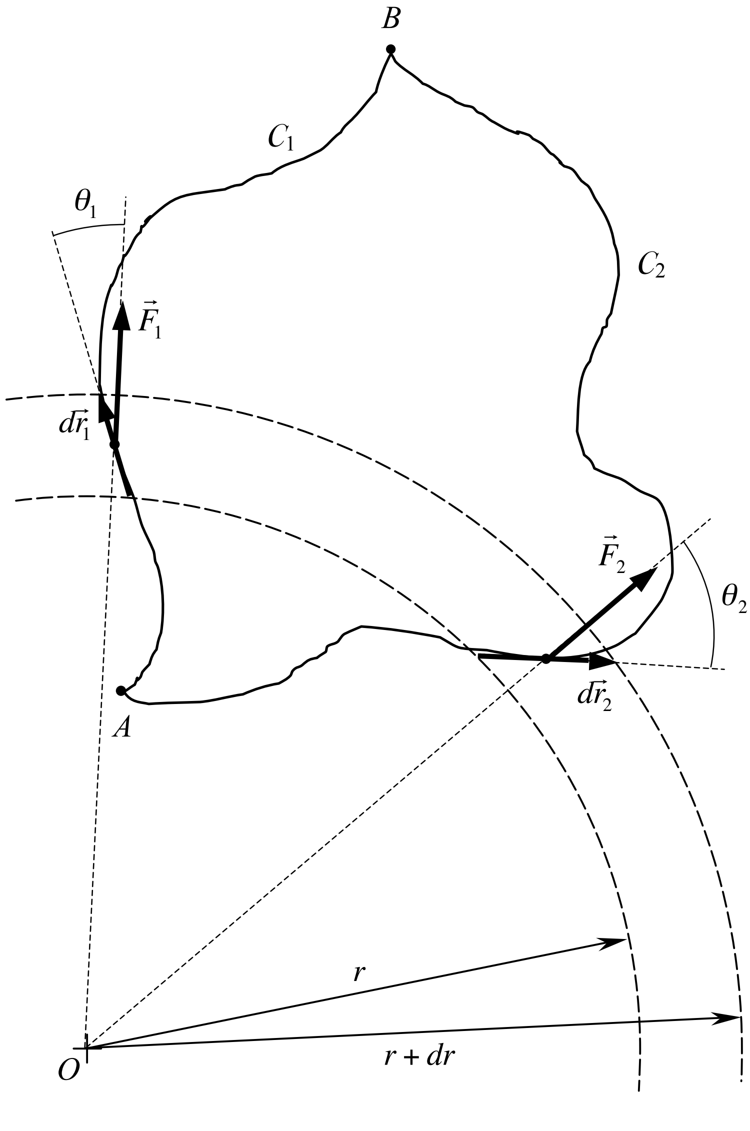
Exemples importants de forces centrales : la force gravitationnelle et la force électrostatique.



lignes de champ

Définition : Une force est dite **conservative** lorsque le travail de cette force le long d'un chemin C reliant deux points A et B de l'espace, noté W_{AB}, a la même valeur pour tous les chemins reliant A et B (c.f. fig. ci-contre).

Montrons que toute force centrale est conservative.
Sur la figure ci-contre existe une force centrale dont la direction passe par le point O. Deux chemins notés C_1 et C_2 relient les points A et B de l'espace. Les courbes en pointillés sont des arcs de cercle centrés en O. Considérons le travail de la force centrale sur les portions $d\vec{r}_1$ et $d\vec{r}_2$ des courbes C_1 et C_2 situées entre les deux arcs de cercle. Sur chacune de ces portions, ce travail est égal à $\vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1$ respectivement $\vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2$. Remarquons que l'on peut considérer le produit scalaire $\vec{F} \cdot d\vec{r} = F dr \cos\theta$ aussi bien comme la projection de $\vec{F}$ sur $d\vec{r}$ que celle de $d\vec{r}$ sur $\vec{F}$. Les grandeurs F_1 et F_2 sont égales sur les deux segments car elles se trouvent à des distances égales du point O :



$$F_1 = F_2 \tag{1}$$

D'autre part, les projections $dr\cos\theta$ des portions de chemin sur les vecteurs $\vec{F}$ respectifs sont égales, car la distance séparant les arcs de cercle, mesurée le long de la direction de $\vec{F}_1$, est égale à celle mesurée le long de la direction de $\vec{F}_2$. Ainsi :

$$dr_1\cos\theta_1 = dr_2\cos\theta_2 \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) permettent d'écrire :

$$F_1 dr_1\cos\theta_1 = F_2 dr_2\cos\theta_2 \tag{3}$$

D'où :

$$\vec{F}_1\cdot d\vec{r}_1 = \vec{F}_2\cdot d\vec{r}_2 \tag{4}$$

sur les portions de chemin considérées. Nous pouvons alors recommencer le même raisonnement pour toutes les portions de chemin, pour ainsi obtenir :

$$\underbrace{\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}}_{C_1} = \underbrace{\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}}_{C_2} \tag{4}$$

que l'on peut aussi noter :

$$\boxed{\underbrace{W_{AB}}_{C_1} = \underbrace{W_{AB}}_{C_2}} \tag{5}$$

où $\underbrace{W_{AB}}_{C_1}$ est le travail de la force centrale le long du premier chemin C_1 reliant A et B et $\underbrace{W_{AB}}_{C_2}$, le travail de la force centrale le long du deuxième chemin C_2 reliant A et B.

Il résulte de cette démonstration, que la force gravitationnelle et la force électrostatique sont des forces conservatives, puisque centrales.