SEM PROSPECTIVE

Lundi 2 mai 2005 à 17 h

La cycloïde

Bernard Vuilleumier

La cycloïde ou « roulette » comme l'appelait Pascal, est la courbe décrite par un point d'une roue qui roule sur un plan sans glisser. L'étude de cette courbe aux propriétés remarquables remonte au paradoxe d'Aristote : pourquoi deux cercles concentriques, l'un ayant un diamètre inférieur à l'autre, parcourent-ils une distance égale s'ils sont tournés selon un cercle, et pourquoi une fois séparés, parcourent-ils des distances proportionnelles à leurs diamètres ? En 1634, Gille Personne (Roberval) parvint à déterminer la forme de cette courbe, et entre 1634 et 1637, il trouva la quadrature et le volume engendrés par la rotation d'un arc de la courbe autour de sa base. Il expliqua en outre la façon de la construire par points. En 1638, Descartes et Fermat donnèrent leur propres solutions à la quadrature d'une arche de la cycloïde et ils trouvèrent une méthode algébrique pour déterminer la tangente à la roulette. En 1658, Pascal, dans une lettre circulaire anonyme, lance un défi aux mathématiciens :

> « *Nous étant occupé il y a quelques mois de diverses questions touchant la cycloïde et son centre de gravité, plusieurs problèmes vinrent se présenter à notre esprit. Nous en demandons instamment la solution aux géomètres les plus illustres de l'univers* »

En décembre de la même année, il publie un recueil contenant ses méthodes et ses résultats au sujet de la détermination des centres de gravité, des surfaces et des volumes liés à la cycloïde. En 1659, Huygens découvre les propriétés isochrones du pendule cycloïdal et en 1697, Jacques et Jean Bernoulli montrent que la courbe de descente la plus rapide pour un point pesant, dite courbe brachystochrone, est une cycloïde.

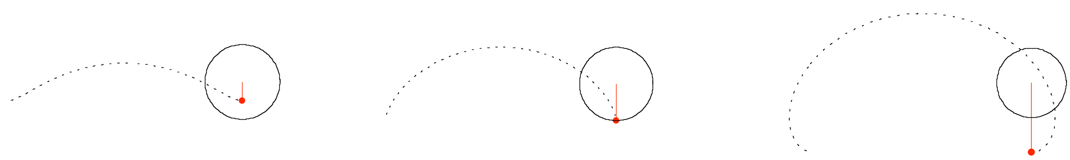


Fig. 1 : Trajectoires décrites par un point d'un disque de rayon r roulant sur un plan sans glisser.
A gauche, le point se trouve à une distance $r/2$ et au centre à une distance r du centre du disque.
A droite, le point est situé sur un segment radial à une distance $2r$ du centre du disque.

Prochaine réunion : lundi 5 septembre 2005 à 17 h

Travaux pratiques

1. Horaires

Rappel : un horaire donne la position d'un mobile en fonction du temps.

a) Donnez l'horaire $\vec{r_c}(t)$ du centre C d'un cercle de rayon r qui roule sur un plan horizontal à vitesse $\vec{v}$.

b) Donnez l'horaire $\vec{r_p}(t)$ d'un point P décrivant une trajectoire circulaire de rayon r à vitesse angulaire ω constante.

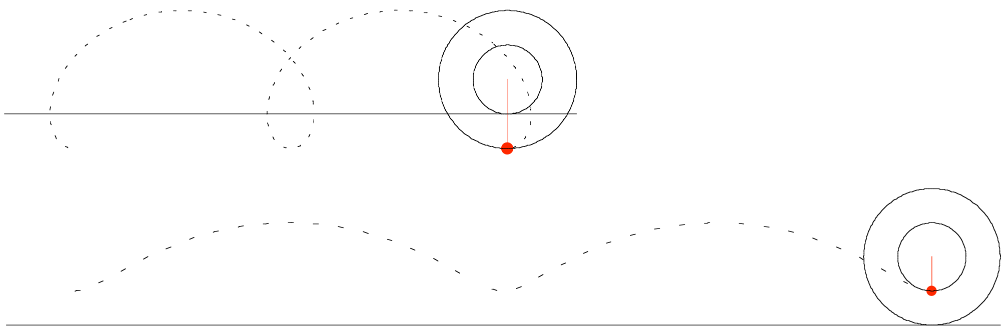
c) Donnez l'horaire $\vec{r}(t)$ d'un point P situé à une distance d du centre d'un cercle de rayon r roulant sans glisser sur un plan horizontal.

2. Cycloïdes

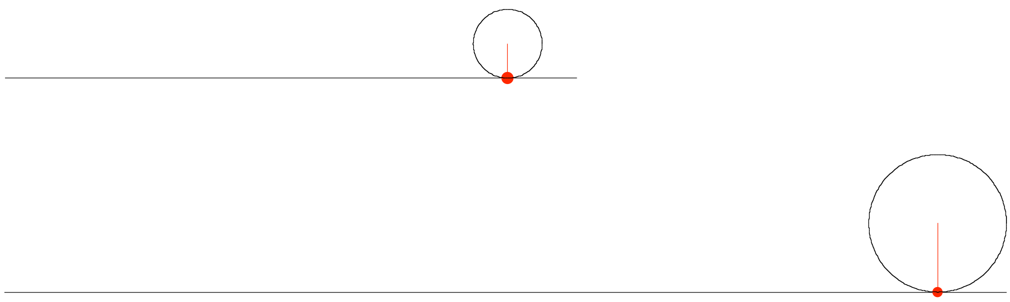
Construisez une animation permettant de faire rouler sans glissement une roue de rayon r sur un plan et d'obtenir la trajectoire d'un point solidaire de la roue et situé à une distance d du centre.

3. Le paradoxe d'Aristote

Deux cercles concentriques et solidaires de diamètres différents parcourent chacun la même distance (pas la même dans les deux cas) qu'on les tourne selon le petit ou le grand cercle :



Une fois séparés, ils parcourent chacun des distances proportionnelles à leurs diamètres :



Pour élucider ce paradoxe :

a) dessinez deux cercles concentriques, l'un ayant un diamètre inférieur à l'autre;

b) faites rouler ces cercles solidaires :

• sur un plan horizontal tangent au petit cercle;

• sur un plan horizontal tangent au grand cercle.

Observez attentivement l'animation et expliquez comment résoudre le paradoxe d'Aristote.

Pour en savoir plus

• Jean-Luc Verley. Autour de la cycloïde (à rechercher sur le web).

• http://p7app.geneve.ch:8080/webMathematica/Bindex.html

La cycloïde : corrigé

Comment élucider le paradoxe d'Aristote

Dessinons deux cercles concentriques :

```
x0 = 0; (* coordonnées du centre des cercles *)
y0 = 0;
r = 1; (* rayon du premier cercle *)
d = 2;  (* rayon du deuxième cercle *)
Show[Graphics[{Circle[{x0, y0}, r], Circle[{x0, y0}, d]}],
 AspectRatio → Automatic];
```

Définissons la vitesse de translation des cercles solidaires ainsi que leur vitesse angulaire. Choisissons la position initiale du point observé, la durée du mouvement et l'intervalle de temps entre deux positions successives. Écrivons l'horaire du centre des cercles par rapport au plan, l'horaire d'un point situé sur un segment radial par rapport au centre des cercles et l'horaire du point observé par rapport au plan. Faisons rouler les cercles solidaires sur un plan horizontal tangent au premier cercle et examinons la trajectoire du point dans les cas suivants :

• le rayon du premier cercle est inférieur à celui du second $r < d$;

• le rayon du premier cercle est supérieur à celui du second $r > d$.

```
r = 1; (* rayon du premier cercle *)
d = 2;  (* rayon du deuxième cercle *)
v = 2 π; (* vitesse de translation du centre des cercles *)
omega = v / r;  (* vitesse angulaire des cercles *)
phi = -π / 2;  (* déphasage de la position initiale du point *)
tmin = 0;
tmax = 2;
Δt = 0.05;
h1[t_] := {v * t, r}
h2[t_] := d {Cos[-omega * t + phi], Sin[-omega * t + phi]}
h[t_] := h1[t] + h2[t]
ps = 0.02;  (* PointSize *)
n = 20;  (* facteur de PointSize pour le PlotRange *)
r1 = 0.005;  (* longueur des traits *)
r2 = 0.02; (* longueur des blancs *)
traj = ParametricPlot[h[t], {t, tmin, tmax}, Axes → None,
  PlotStyle → Dashing[{r1, r2}], DisplayFunction → Identity];
coord = Table[h[t], {t, tmin, tmax, Δt}];
pts = Map[Point, coord];
centres = Table[h1[t], {t, tmin, tmax, Δt}];
rayons = Table[r, {(tmax - tmin) / Δt + 1}];
cercles = MapThread[Circle, {centres, rayons}, 1];
rayons2 = Table[d, {(tmax - tmin) / Δt + 1}];
cercles2 = MapThread[Circle, {centres, rayons2}, 1];
Table[Show[traj,
  Graphics[{PointSize[ps], Line[{{-d, 0}, {v * tmax + d, 0}}], {Hue[1], pts[[i]],
     Line[{coord[[i]], centres[[i]]}], Line[{{-d, r - d}, {v * tmax + d, r - d}}]},
    cercles[[i]], cercles2[[i]]}], AspectRatio → Automatic,
  PlotRange → {{0 - Max[d, r] - n * ps, v * tmax + Max[d, r] + n * ps},
    {Min[0, r - d] - n * ps, Max[d + r, 2 r] + n * ps}},
  DisplayFunction → $DisplayFunction], {i, Length[pts]}]
```

Nous constatons dans chaque cas un glissement du cercle sur le plan dessiné en rouge, ce qui explique que les cercles parcourent la même distance et résout le paradoxe d'Aristote.