Novembre 2005

Lettre n° 200

La parabole du chaos

Bernard Vuilleumier

Une parabole est un récit assez bref dans lequel se cache un enseignement et utilisant un procédé consistant à délivrer un message au moyen d'une comparaison. Selon H.-J. Stiker, on ne peut saisir le contenu des paraboles sans avoir étudié leur structure et elles sont davantage des cadres formels, des arrangements de possibles, que des comparaisons. Nous adoptons pleinement ce point de vue et la parabole que nous allons examiner, bien que faisant partie des connaissances mathématiques de base, nous permettra de découvrir le *chaos déterministe* et la *sensibilité aux conditions initiales.* Ces deux notions subtiles et paradoxales - Le chaos n'est-il pas purement aléatoire ? Comment une infime différence peut-elle donner lieu à des évolutions totalement différentes ? - se laissent aborder d'une manière intuitive avec la parabole.

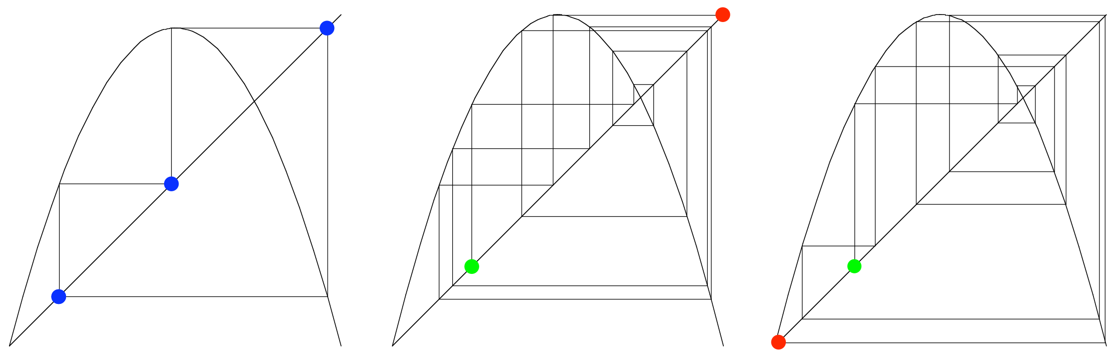


Fig. 1 : En composant n fois la parabole $y = f(x) = rx(1-x)$ avec elle-même, on peut obtenir des « orbites » d'aspect fort différent. La figure de gauche illustre une orbite périodique de période 3, signature du chaos. Les deux figures suivantes donnent l'évolution d'orbites issues de valeurs initiales ne différant que d'une quantité infime mais conduisant à des valeurs finales fort différentes.

La parabole qui coupe l'axe Ox en 0 et en 1 et dont l'ordonnée du sommet est aussi comprise entre 0 et 1 selon la valeur du paramètre r, est définie par la fonction $f(x) = rx(1-x)$. La composition de cette fonction avec elle-même, qui peut aisément se représenter graphiquement, donne une suite de valeurs ou « orbite ». Les orbites obtenues, selon le point de départ et la valeur du paramètre r, permettent d'illustrer les phénomènes de chaos déterministe et d'imprévisibilité qui se rencontrent dans de très nombreux domaines scientifiques.

Prochaine publication: décembre 2005

Activités proposées

■ Exercice 1

L'expression la plus générale pour la parabole est donnée par $y = ax^2 + bx + c$.
Que doivent valoir les coefficients a, b et c pour que la parabole coupe l'axe Ox en 0 et en 1 et pour que son sommet se situe en $(\frac{1}{2}, y)$, avec $0 < y \leq 1$?

■ Exercice 2

En utilisant la parabole $f[x] = rx(1-x)$, calculez la valeur de cette fonction pour :
a) x=1/5 lorsque r vaut 4
b) x=16/25
c) x=576/625
d) Calculez le résultat trouvé sous c) en partant de x=1/5 et en composant 3 fois la fonction avec elle-même.

■ Exercice 3

Lorsqu'une fonction est composée n fois avec elle-même on dit qu'elle est itérée n fois. On utilise la notation suivante $f^n[x]$ pour signifier n compositions de f avec elle-même à partir de la valeur initiale x. Quelle est l'instruction qui permet d'obtenir :
a) $f^n[x]$?
b) la succession des valeur de x, $f[x]$, $f[f[x]]$,..., $f^n[x]$?

■ Exercice 4

a) Donnez une interprétation géométrique de l'itération de la fonction $f[x] = rx(1-x)$ et dessinez le résultat de l'itération de cette fonction en partant de différentes valeurs initiales et pour différentes valeurs du paramètre r.
b) A quels types de comportements l'itération de cette fonction peut-elle donner lieu ?

■ Exercice 5

a) Reportez, en fonction de t, les n +1 valeurs $f^t[x]$ lorsque t varie de 0 à n.
b) Illustrez la sensibilité aux conditions initiales en comparant deux évolutions issues de valeurs initiales très voisines.

Pour en savoir plus
• Devaney, Robert L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, 2nd edition* Addison-Wesley, 1989.
• Stiker, Henri-Jacques. Article « Parabole », *Encyclopædia Universalis 2004*.

La parabole du chaos : corrigé

■ Exercice 1

Que doivent valoir les coefficients *a*, *b* et *c* pour que la parabole coupe l'axe *Ox* en 0 et en 1 et pour que son sommet se situe en ($\frac{1}{2}$, *y*), avec $0 < y \leq 1$?

```
f[x_] := a * x^2 + b * x + c
coeff = Solve[{f[0] == 0, f[1] == 0, f[1 / 2] == y}, {a, b, c}]
```

```
{{a → -4 y, b → 4 y, c → 0}}
```

La parabole coupe l'axe *Ox* en 0 et en 1 lorsque les coefficients *a* et *b* sont égaux et valent 4*y* (*y* étant l'ordonnée du sommet de la parabole) et lorsque *c* est nul:

```
f[x] /. coeff
```

$\{4\,x\,y - 4\,x^2\,y\}$

Appelons $\frac{r}{4}$ le coefficient *y*:

```
f[x] /. coeff /. y → r / 4
```

$\{4\,x - 4\,x^2\}$

■ Exercice 2

La parabole qui coupe l'axe *Ox* en 0 et en 1 et dont l'ordonnée du sommet est également comprise entre 0 et 1 selon la valeur du paramètre *r*, est définie par *f*[*x*] = *rx*(1-*x*).
Calculons la valeur de la fonction pour :
a) *x*=1/5 lorsque le paramètre *r* vaut 4:

```
f[1 / 5] /. coeff /. y → 1
```

$\left\{\frac{16}{25}\right\}$

b) *x*=16/25:

```
f[16 / 25] /. coeff /. y → 1
```

$\left\{\frac{576}{625}\right\}$

c) *x*=576/625:

```
f[576/625] /. coeff /. y → 1
```

$\left\{\frac{112896}{390625}\right\}$

d) Ce dernier résultat peut être obtenu en partant de *x*=1/5 et en composant 3 fois la fonction avec elle-même:

```
f[f[f[1 / 5]]] /. coeff /. y → 1
```

$\left\{\frac{112896}{390625}\right\}$

■ Exercice 3

a) La syntaxe suivante est équivalente et plus économique pour un grand nombre de compositions:

```
Nest[f, 1 / 5, 3] /. coeff /. y → 1
```

$\left\{\frac{112896}{390625}\right\}$

b) Pour obtenir la liste des itérés successifs:

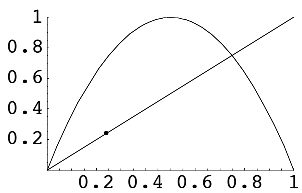
```
NestList[f, 1 / 5, 3] /. coeff /. y → 1
```

$\left\{\left\{\frac{1}{5}, \frac{16}{25}, \frac{576}{625}, \frac{112896}{390625}\right\}\right\}$

■ Exercice 4.

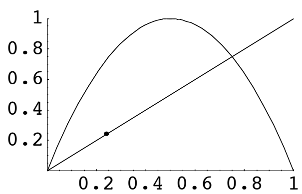
Les instructions de cet exercice nécessitent le module « Orbit », disponible sur Hypatie, pour être exécutées. Les animations en revanche fonctionnent sans le module.
a) Interprétation géométrique: voir les animations.

```
Needs["Chaos`Orbit`"] (* ⚠ nécessite le module Orbit *)
f[x_] := r * x (1 - x)
r = 4;
x0 = 0.24;
n = 12;
e = Table[Orbit[f, x0, 0, t], {t, 0, n}];
```

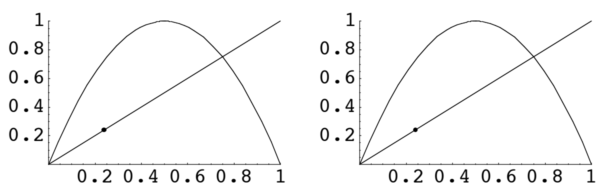


Modifions légèrement la valeur initiale et comparons les évolutions:

```
f[x_] := r * x (1 - x)
r = 4;
x0 = 0.241;
n = 12;
e1 = Table[Orbit[f, x0, 0, t], {t, 0, n}];
```




```
Table[Show[GraphicsArray[Transpose[{e, e1}][[i]]]], {i, Length[Transpose[{e, e1}]]}];
```

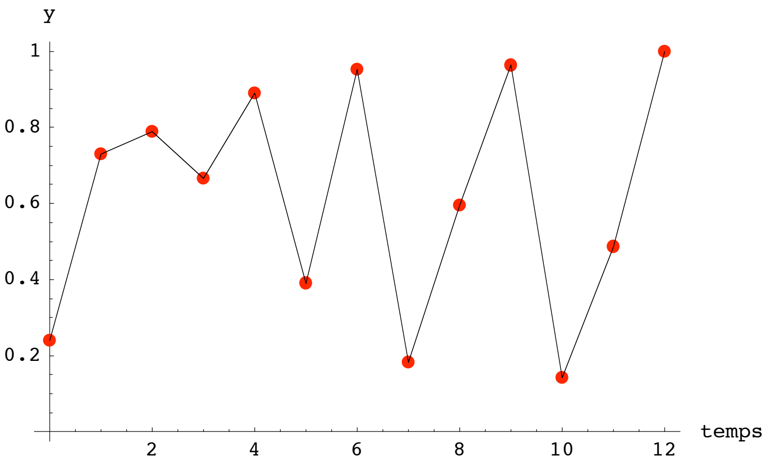


b) Les évolution peuvent converger vers un point fixe, être périodiques ou chaotiques.

▪ Exercice 5

a) Les itérés, reportés en fonction de *t* (temps discret) donnent l'évolution du système:

```
f[x_] := r * x (1 - x)
r = 4;
x0 = 0.24;
n = 12;
Show[ListPlot[Transpose[{Range[0, n],
      NestList[f, x0, n]}], PlotStyle → {Hue[1], PointSize[0.02]},
    AxesOrigin → {0, 0}, DisplayFunction → Identity],
  ListPlot[Transpose[{Range[0, n],
      NestList[f, x0, n]}], PlotJoined → True,
    AxesOrigin → {0, 0}, DisplayFunction → Identity],
  DisplayFunction → $DisplayFunction, AxesLabel → {"temps", "y"}];
```



b) En modifiant légèrement la valeur initiale, on obtient une évolution différente:

```
f[x_] := r * x (1 - x)
r = 4;
x0 = 0.241;
n = 12;
Show[ListPlot[Transpose[{Range[0, n],
      NestList[f, x0, n]}], PlotStyle → {Hue[1], PointSize[0.02]},
    AxesOrigin → {0, 0}, DisplayFunction → Identity],
  ListPlot[Transpose[{Range[0, n],
      NestList[f, x0, n]}], PlotJoined → True,
    AxesOrigin → {0, 0}, DisplayFunction → Identity],
  DisplayFunction → $DisplayFunction, AxesLabel → {"temps", "y"}];
```