Cinématique vectorielle

Source : J.-A. Monard, *Mécanique*, Bienne 1977

Vecteur position

Pour repérer la position d'un point P dans l'espace, nous choisirons un point fixe O et nous considérerons le vecteur $\vec{r}$ que nous appellerons vecteur position du point P. Le point O est l'origine. Les composantes numériques du vecteur position suivant un système d'axes orthonormés (O, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) sont appelées coordonnées du point P. En identifiant le vecteur avec la matrice formée de ses composantes, nous écrirons :

$$\vec{r} = (x,\ y,\ z)$$

Horaire

La fonction qui, à chaque instant t, fait correspondre un vecteur position $\vec{r}$ est appelée horaire du mobile. Le mouvement d'un point matériel est déterminé par son horaire :

$$t \longrightarrow \ \vec{r} = \vec{f}(t)$$

Pour repérer la position d'un point matériel, il faut un référentiel. Nous dirons qu'un point matériel est immobile par rapport à un référentiel si son vecteur position dans ce référentiel ne varie pas au cours du temps.

Vecteur vitesse

Soit t la date de passage du mobile au point P. Un instant plus tard, à une date t', le mobile se trouve au point P'. Le déplacement de P à P' peut se représenter par $\Delta\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}$ et le temps utilisé pour ce déplacement par $\Delta t = t' - t$. Nous définirons la vitesse moyenne sur le parcours PP' par le rapport :

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Si nous choisissons des intervalles de temps Δt de plus en plus petits, les espaces parcourus $\Delta\vec{r}$ deviennent aussi de plus en plus petits. Pour la plupart des mouvements que nous étudierons, $\vec{v}_m$ tend vers une limite lorsque Δt tend vers zéro. Cette limite est, par définition, la vitesse au point P.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \vec{v} = \dot{\vec{r}}$$

L'opération que nous avons faite avec le vecteur $\vec{r}$ se nomme *dérivation* et le résultat de cette opération s'appelle *dérivée*. Ainsi, la vitesse est la dérivée par rapport au temps de la fonction donnant le vecteur position du mobile.
Le vecteur vitesse en un point est toujours tangent à la trajectoire en ce point. La grandeur du vecteur vitesse, qui est toujours positive ou nulle, est désignée par v. Nous écrirons donc $\|\vec{v}\| = v$. Les composantes du vecteur vitesse suivant (O, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) seront désignées par v_x, v_y, v_z, et nous écrirons, comme pour le vecteur position :

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

La norme et les composantes du vecteur vitesse sont liées, comme pour tout vecteur, par la relation :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Lorsque la position du mobile est donnée par une fonction, le procédé mathématique de *dérivation* permet d'obtenir la vitesse du mobile. Réciproquement, si la vitesse initiale du mobile est connue et si la vitesse est donnée par une fonction, le procédé mathématique d'*intégration* permet de trouver la position du mobile.

Vecteur accélération

Soit t la date de passage du mobile au point P. Un petit moment plus tard, à une date t', le mobile se trouve au point P'. Soient $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ les vitesses du mobile en ces points. Durant l'intervalle de temps $\Delta t = t' - t$, la vitesse a subi une variation $\Delta\vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}$. Choisissons des intervalles de temps Δt de plus en plus petits. Pour la plupart des mouvements que nous étudierons, le rapport définissant l'accélération moyenne sur le parcours PP' :

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

tend vers une limite lorsque Δt tend vers zéro. Cette limite est, par définition, l'accélération au point P.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \vec{a} = \ddot{\vec{r}}$$

L'accélération est la dérivée par rapport au temps de la fonction donnant le vecteur vitesse du mobile, qui elle-même est la dérivée par rapport au temps de la fonction donnant le vecteur position du mobile. Si nous connaissons la vitesse et la position initiales du mobile et si son accélération est donnée par une fonction, nous pouvons donc trouver, par *intégration*, sa vitesse et sa position à n'importe quel instant.

Exercices

Exercice 1
Un point matériel se déplace dans le plan. Son horaire est :

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\, t \quad \text{avec} \quad \vec{r}_0 = (12 \text{ m}, -3 \text{ m}) \quad \text{et} \quad \vec{v}_0 = (0 \text{ m/s}, 7 \text{ m/s})$$

Dessinez le vecteur position et le vecteur vitesse du mobile de seconde en seconde pour $0 \le t \le 3$ secondes.

Exercice 2
Un point matériel se déplace dans le plan. Son horaire est :

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\, t + \vec{a}_0\, t^2 \quad \text{avec} \quad \vec{r}_0 = (10 \text{ m}, -2 \text{ m}) \quad \vec{v}_0 = (3 \text{ m/s}, 2 \text{ m/s}) \quad \vec{a}_0 = (-2 \text{ m/s}^2, 1 \text{ m/s}^2)$$

a) Dessinez le vecteur position de seconde en seconde pour $-2 \le t \le 2$ secondes.
b) Dessinez l'hodographe du mobile.
c) Dessinez la trajectoire et le vecteur vitesse de seconde en seconde pour $-2 \le t \le 2$ secondes.

Exercice 3
Deux mobiles ont respectivement les horaires suivants :

$$\vec{r_1} = \vec{r}_{10} + \vec{v}_{10}\, t \quad \text{avec} \quad \vec{r}_{10} = (20 \text{ m}, -5 \text{ m}) \quad \text{et} \quad \vec{v}_{10} = (-1 \text{ m/s}, 5 \text{ m/s})$$

$$\vec{r_2} = \vec{r}_{20} + \vec{v}_{20}\, t \quad \text{avec} \quad \vec{r}_{20} = (8 \text{ m}, 15 \text{ m}) \quad \text{et} \quad \vec{v}_{20} = (2 \text{ m/s}, 0 \text{ m/s})$$

Ces mobiles entreront-ils en collision ? Si oui, dites après combien de temps et indiquez où la collision se produit.

Exercice 4
Un point matériel a l'horaire suivant :

$$\vec{r} = \vec{v}_0\, t + \vec{a}_0\, t^2 \quad \text{avec} \quad \vec{v}_0 = (4 \text{ m/s}, 0 \text{ m/s}) \quad \text{et} \quad \vec{a}_0 = (-2 \text{ m/s}^2, 1 \text{ m/s}^2)$$

a) A quel instant sa vitesse est-elle parallèle aux axes de coordonnées ?
b) A quel instant sa vitesse a-t-elle une grandeur de 2 m/s ?