Exercices sur les oscillations harmoniques

Exercices extraits de l'ouvrage « Mécanique » de J.-A. Monard. Éditeur : centrale d'achats de la ville de Bienne, Rennweg 62, 2501 Bienne, 1977.

Exercice 20.1

Un ressort de constante *k*, disposé horizontalement, a une extrémité fixe et une extrémité libre. Un wagonnet de masse *m* vient buter contre cette dernière avec une vitesse *v*. Quelle est la déformation maximale du ressort ? Quelle est la durée du contact du wagonnet avec le ressort ? Combien faut-il de temps pour que la vitesse du wagonnet passe de la valeur *v* à la valeur *u* ?

a) La déformation maximale s'obtient en égalant la perte d'énergie cinétique au gain d'énergie élastique et en résolvant cette équation par rapport à Δy

```
data = {g → 0, k → 100,
   m → 1 / 2, yeq → 0, y0 -> 0,
   v0 → 1, u -> 8 / 10};
Solve[m * v0 ^ 2 / 2 == k * Δy ^ 2 / 2,
  Δy];
% /. data
% // N
```

$$\left\{\left\{\Delta y \to -\frac{1}{10\sqrt{2}}\right\}, \left\{\Delta y \to \frac{1}{10\sqrt{2}}\right\}\right\}$$

```
{{Δy → -0.0707107},
 {Δy → 0.0707107}}
```

b) Le wagonnet est en contact avec le ressort durant une demie période :

```
π * Sqrt[m / k] /. data
% // N
```

$$\frac{\pi}{10\sqrt{2}}$$

```
0.222144
```

c) Dérivons l'horaire pour obtenir la vitesse en fonction du temps et calculons après combien de temps cette vitesse est égale à une valeur *u* donnée :

```
data = {g → 0, k → 100,
   m → 1 / 2, yeq → 0, y0 -> 0,
   v0 → 1, u -> 8 / 10};
Solve[0.8 == Sqrt[200] /
    (10 Sqrt[2])
   Cos[Sqrt[200] * t], t]

{{t → -0.0455024},
 {t → 0.0455024}}
```

- **Exercice 20.2**

a) Calculons $k = \frac{F}{x}$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\omega_2 = \sqrt{\frac{2\,k}{m}} = \sqrt{2}\,\omega$

```
data202 = {m → 0.12,
    f → 1, x → 0.05, a → 0.1};
{k = f / x, Sqrt[k / m] / (2 Pi),
  Sqrt[2 k / m] / (2 Pi),
  a * Sqrt[2 k / m]} /. {data202}
Remove[k]

{{20., 2.05468,
  2.90576, 1.82574}}
```

▪ Exercice 20.3

Pour de petites amplitudes, la période d'un pendule est donnée par $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. La période vaut 2 (s). Calculons l :

```
data203 = {T → 2, g → 9.81};
g * T ^ 2 / (4 π ^ 2) /. {data203}

{0.993961}
```

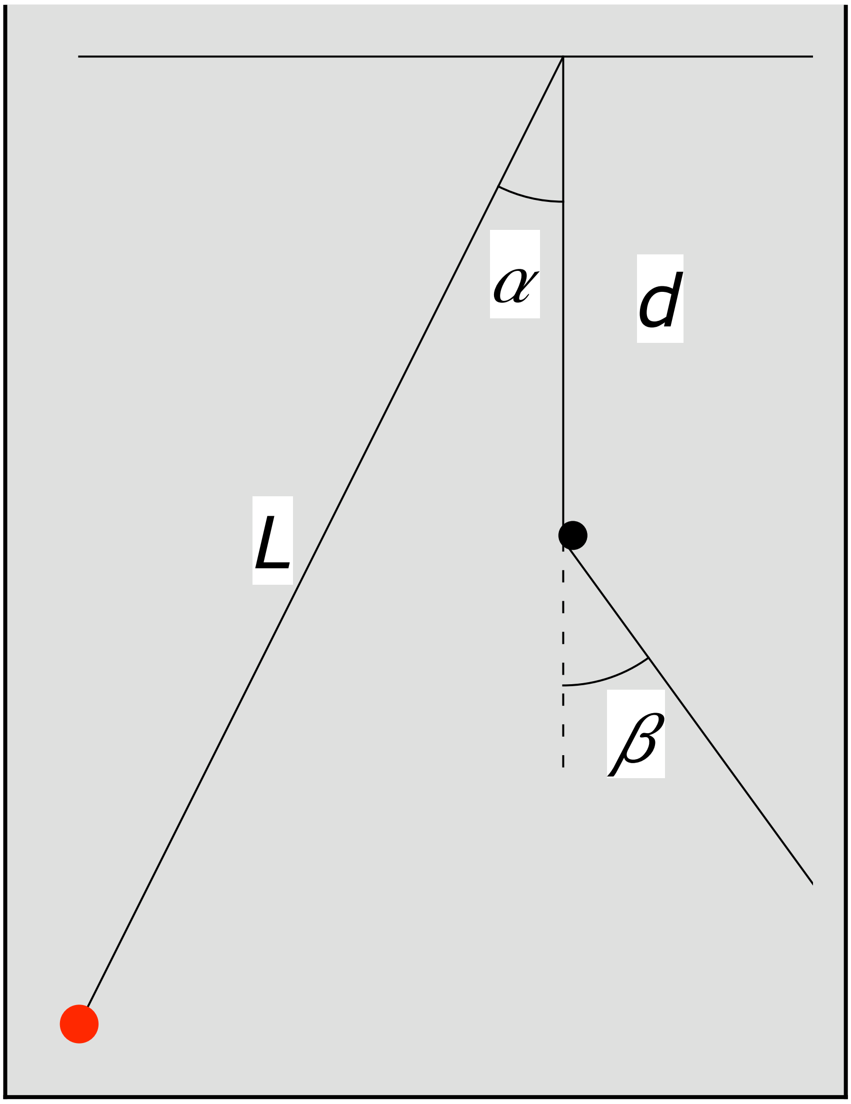
▪ Exercice 20.4

La période du pendule boiteux est égale à la demi période de chacun des pendules considérés séparément. $T = \frac{T_L}{2} + \frac{T_{L-d}}{2}$. Calculons cette période :

```
data204 =
  {l → 2.2, d -> 1, g → 9.81};
π (Sqrt[l / g] + Sqrt[
     (l - d) / g]) /. {data204}

{2.58651}
```

```
Show[Graphics[
  {Circle[{0, 1}, 0.3, {-Pi / 2 -
       ArcTan[1 / 2], -Pi / 2}],
   Circle[{0, 0}, 0.3, {3 Pi / 2,
     3 Pi / 2 + ArcTan[Sqrt[
         (Sqrt[5] - 1) ^2 - 1]]}],
   Line[{{-1, 1}, {1, 1}}],
   Line[{{-1, -1}, {0, 1}}],
   Line[{{0, 0}, {0, 1}}],
   {Dashing[{0.01, 0.02}],
    Line[{{0, 0}, {0, -0.5}}]},
   Line[{{0, 0},
     {Sqrt[(Sqrt[5] - 1) ^2 - 1],
      -1}}],
   Text["α", {-0.1, 0.55},
    {0, 0}], Text["β",
    {0.15, -0.4}, {0, 0}],
   Text["d", {0.2, 0.5}, {0, 0}],
   Text["β",
    {0.15, -0.4}, {0, 0}],
   Text["L", {-0.6, 0}, {0, 0}],
   Text["β", {0.15, -0.4},
    {0, 0}], Disk[{0.02, 0.01},
    0.03], Hue[1],
   Disk[{-1, -1}, 0.04], Disk[
    {Sqrt[(Sqrt[5] - 1) ^2 - 1],
     -1}, 0.04]}],
 AspectRatio → Automatic,
 PlotRange → All,
 TextStyle →
  {FontFamily → "Verdana",
   FontSlant -> "Italic",
   FontSize → 18}]
```



Exercice 20.5

Nous utilisons la conservation de l'énergie mécanique. Lorsque $v = 0$, cette dernière est sous forme d'énergie élastique et vaut $\frac{1}{2} k x^2$. En exprimant $x = \sqrt{\frac{2\, E_{méc}}{k}}$ et en posant $x_2 = \sqrt{\frac{2\,(1-\eta)\, E_{méc}}{k}}$, nous pouvons calculer la diminution relative d'amplitude :

```
data205 = {eta → 0.4};
1 - Sqrt[1 - eta] /. {data205}

{0.225403}
```

■ Exercice 20.6

Exprimons la position et la vitesse en fonction du temps $x(t) = A sin(\omega t)$ et $v(t) = \dot{x}(t) = \omega\ A cos(\omega t)$. L'énergie cinétique est égale à l'énergie élastique lorsque $mv^2 = kx^2$. En substituant v et x dans cette égalité par les expressions ci-dessus, on trouve t et x :

```
data206 =
  {m → 0.12, k → 20, a → 0.05};
sol206 = Solve[m (Sqrt[k / m] * a *
        Cos[Sqrt[k / m] * t]) ^2 ==
     k (a * Sin[Sqrt[k / m] * t]) ^2,
    t] /. data206

{{t → -0.18251},
 {t → -0.0608367},
 {t → 0.0608367}, {t → 0.18251}}
```

```
a * Sin[Sqrt[k / m] * t] /.
  data206 /. sol206

{-0.0353553, -0.0353553,
 0.0353553, 0.0353553}
```

■ Exercice 20.7

La force de gravitation dans le tunnel vaut $F = mg(r)$, où $g(r)$ se calcule en considérant la masse qui est à l'intérieur de la sphère de rayon r : $g(r) = \frac{\frac{4}{3}\rho G \pi r^3}{r^2} = \frac{4}{3} G\rho\pi\ r$. En posant $k = \frac{4}{3} G\rho\pi\ m$, on exprime $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $r(t) = R_T\ \sin(\omega t)$ et $v(t) = \omega R_T\ \cos(\omega t)$. La vitesse est maximale lorsque $\cos(\omega t) = 1$. On obtient $v_{max} = \sqrt{\frac{4 G \rho \pi}{3}}\ R_T$

```
data207 =
  {G → 6.67 * 10 ^ -11, rho → 5517,
   RT → 6.371 * 10 ^ 6};
Sqrt[4 * Pi * G * rho / 3] RT /.
 data207

7909.81
```

■ Exercice 20.8

La période vaut 0.4 (s). La vitesse maximale vaut $v_{max} = \omega A$ avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$ d'où $A = \frac{v_{max}}{\omega} = \frac{v_{max}\ T}{2\pi}$

```
data208 = {v → 5, t → 0.4};
v * t / (2 π) /. data208

0.31831
```

▪ Exercice 20.9

La force de rappel vaut $F_{rappel} = -2F\sin\alpha = -2F\frac{x}{L} = -kx$ où x est l'écart par rapport à l'équilibre. On a donc $k = \frac{2F}{L}$ et $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2F}{Lm}}$

La fréquence vaut $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2F}{Lm}}$

```
data209 =
  {m → 0.1, l → 0.8, f → 50};
Sqrt[2 f / (l * m)] / (2 π) /.
 data209

5.62698
```

▪ Exercice 20.10

La position d'équilibre se situe à mi-hauteur entre les deux niveaux. La force de rappel est proportionnelle à $2\Delta h$. La période et donnée par $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. La constante de proportionnalité entre la force exercée sur l'oscillateur et l'écart par rapport à la position d'équilibre donne k. La force de rappel est égale à la différence de pression entre les deux niveaux multipliée par la section du tube : $F_{rappel} = -2S\rho g\Delta h$. La constante k vaut donc $2S\rho g$, *d'où* $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2\rho Sg}}$

```
data210 = {m → 1, s → 50 * 10 ^ -6,
   rho → 13 800, g → 9.8};
2 π Sqrt[m / (2 rho * s * g)] /.
 data210

1.70855
```

Connaissant la masse m et la masse volumique ρ du mercure ainsi que la section S du tube, ou peut calculer la longueur L que le mercure occupe dans le tube : $V = \frac{m}{\rho}$ et $L = \frac{V}{S} = \frac{m}{\rho S}$, ce qui permet d'écrire $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$. On voit ainsi que la période ne dépend ni de la section du tube ni de la masse volumique du liquide qui l'occupe.