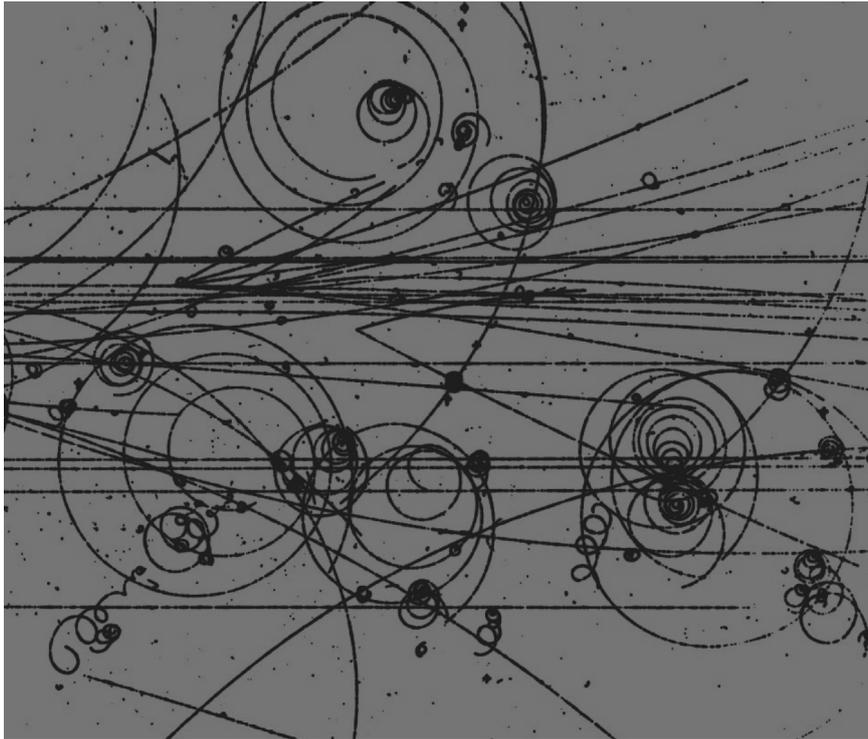


# THÉORIE DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE DYNAMIQUE RELATIVISTE



*Par Pascal Rebetez  
Septembre 2012*

## RÉSUMÉ

Nous présentons dans cet article une manière d'établir la quantité de mouvement et l'énergie relativistes. En postulant et en appliquant la conservation de la quantité de mouvement à la situation d'une collision élastique, nous obtenons son expression. Par une approche géométrique exploitant le diagramme d'espace-temps de Loedel, nous construisons ensuite le quadrivecteur énergie-quantité de mouvement pour obtenir l'expression de l'énergie et montrons que sa conservation résulte de la conservation de la quantité de mouvement. Toujours à l'aide d'un diagramme d'espace-temps de Loedel, nous établissons les différentes relations de la dynamique relativiste. Nous appliquons finalement les deux principes de conservation à la situation d'une collision inélastique, pour mettre en évidence la transformation d'énergie en masse, un phénomène typiquement relativiste.

## CONTENU

Introduction .....	3
La quantité de mouvement .....	3
Le quadrivecteur énergie-quantité de mouvement et l'énergie relativiste .....	11
Relations entre énergie, quantité de mouvement, masse et vitesse .....	18
Dynamique relativiste et collisions inélastiques .....	22
Annexe 1 : Référentiel dans lequel les billes ont des vitesses opposées .....	26
Annexe 2 : Les paramètres dont dépend la vitesse de la bille heurtée .....	27
Annexe 3 : la quantité de mouvement relativiste – autre démarche .....	33
Références .....	36

## Introduction

La physique s'occupe de la matière, de son mouvement et des causes de ce dernier. En mécanique newtonienne, les trois grandeurs que sont la quantité de mouvement ( $\vec{p}$ ), l'énergie ( $E$ ) et le moment cinétique ( $\vec{L}$ ), obéissent chacune à un principe de conservation. On peut démontrer mathématiquement que toutes les lois de la dynamique sont équivalentes à cet ensemble de trois lois de conservation.

En relativité restreinte cependant, où les vitesses peuvent être proche de celle de la lumière dans le vide ( $c$ ), les expériences montrent que ces trois grandeurs ( $\vec{p}, E, \vec{L}$ ) telles que définies en mécanique newtonienne, ne sont plus conservées dans des phénomènes faisant intervenir des vitesses élevées (par exemple dans les collisions rapides).

Il faut donc choisir : abandonner l'expression newtonienne de ces trois grandeurs ( $\vec{p} = m\vec{v}$ ,  $E = \frac{1}{2}mv^2$ ,  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ ) et maintenir les principes de conservation ou alors, maintenir les définitions newtoniennes de  $\vec{p}$ ,  $E$  et  $\vec{L}$  et abandonner les principes de conservation. Les principes de conservations sont si féconds en physique que c'est leur maintien (le premier choix) qui a historiquement (et fructueusement) été retenu. Plus précisément, Einstein et d'autres ont cherché de nouvelles expressions de la quantité de mouvement et de l'énergie qui satisfassent les principes de conservation.

C'est cette démarche que nous adopterons dans ce qui suit. En particulier, nous *postulerons* le principe de conservation de la quantité de mouvement et nous en *déduirons* l'expression de la quantité de mouvement relativiste, *définie comme une grandeur vectorielle qui se conserve dans tous les référentiels d'inertie*.

De même que l'espace et le temps appartiennent à une entité plus large, l'espace-temps, nous construirons ensuite le quadrivecteur énergie-quantité de mouvement à partir du quadrivecteur déplacement qui lie deux événements de l'espace-temps. Nous obtiendrons ainsi l'expression relativiste de l'énergie et démontrerons sa conservation dans tous les référentiels d'inertie.

Au passage, nous obtiendrons une forme d'énergie inconnue en mécanique newtonienne, l'énergie associée à la masse (l'équivalence entre masse et énergie) et nous exprimerons les différentes relations entre la quantité de mouvement relativiste, l'énergie relativiste, la masse et la vitesse.

## La quantité de mouvement

Nous *définissons* la quantité de mouvement comme une grandeur associée à chaque particule, de sorte que :

- la somme des quantités de mouvement d'un ensemble de particules se conserve lors de leurs interactions
- la quantité de mouvement d'une particule est une grandeur vectorielle dont la direction et la norme sont entièrement déterminées par le vecteur vitesse de cette particule.

Nous devons donc d'abord déterminer l'orientation du vecteur quantité de mouvement qui caractérise chaque particule, puis la relation qui lie la norme du vecteur quantité de mouvement au vecteur vitesse.

### Orientation du vecteur quantité de mouvement

En *postulant* l'isotropie de l'espace dans un référentiel d'inertie (les propriétés de l'espace sont les mêmes dans toutes les directions) et par un raisonnement basé sur la symétrie, on arrive à la conclusion que la direction du vecteur quantité de mouvement est la même que celle du vecteur vitesse d'une particule. Cette direction étant déterminée, deux sens sont possibles. Nous choisissons arbitrairement comme sens du vecteur quantité de mouvement le même sens que celui du vecteur vitesse. En conclusion, *le vecteur quantité de mouvement a la même orientation (direction et sens) que celle du vecteur vitesse d'une particule.*

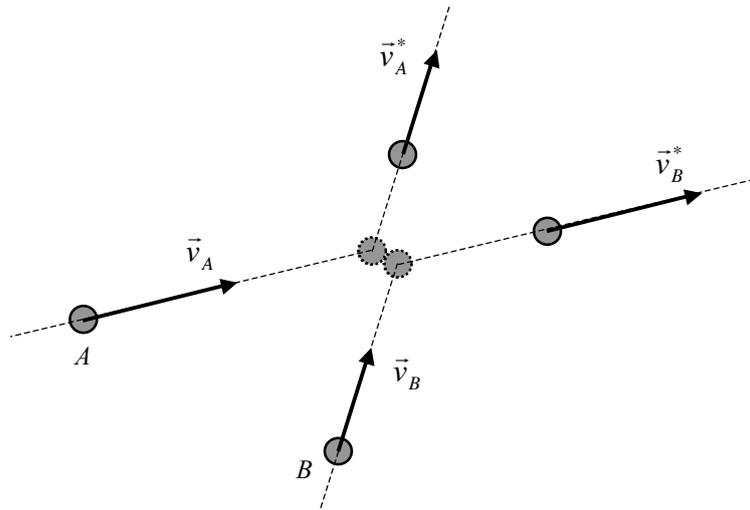
### Norme du vecteur quantité de mouvement

Nous allons développer deux démarches différentes pour trouver la relation entre la norme du vecteur quantité de mouvement et le vecteur vitesse. Pour chacune d'elle, nous exprimerons deux conditions :

- la validité du principe de conservation de la quantité de mouvement dans le cas particulier d'une collision élastique et la formule de composition relativiste des vitesses dans la première démarche
- à nouveau, la validité du principe de conservation de la quantité de mouvement dans le cas particulier d'une collision élastique et l'invariance de l'intervalle dans l'espace-temps dans la deuxième démarche, qui est présentée dans l'annexe 3.

Notre but est de trouver les caractères de la quantité de mouvement d'une particule dont la vitesse peut être très proche de celle de la lumière, *à partir de ce que nous enseigne la physique classique sur la quantité de mouvement d'une particule animée d'une vitesse très faible* (par rapport à celle de la lumière). Il faut donc que la quantité de mouvement relativiste recherchée se réduise à la quantité de mouvement newtonienne pour des vitesses faibles par rapport à celle de la lumière.

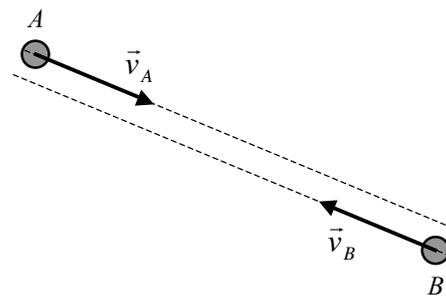
Considérons une collision *élastique* latérale (non frontale) dans le plan entre deux billes *A* et *B* identiques (de même masse). On entend par collision élastique, une collision qui ne change pas les masses des particules. Elle est donc *réversible*, c'est-à-dire qu'elle a pour seul effet de *modifier les directions des vitesses des billes sans modifier leurs normes* (fig.1).



**Fig. 1 :** Une collision élastique dans le plan entre deux billes A et B identiques, dont les vecteurs vitesse ont des normes et des orientations différentes.

Il existe un référentiel dans lequel les billes ont, *avant la collision*, des vitesses de mêmes normes et de sens opposés (fig.2). (Cette affirmation est démontrée dans l'annexe 1.)

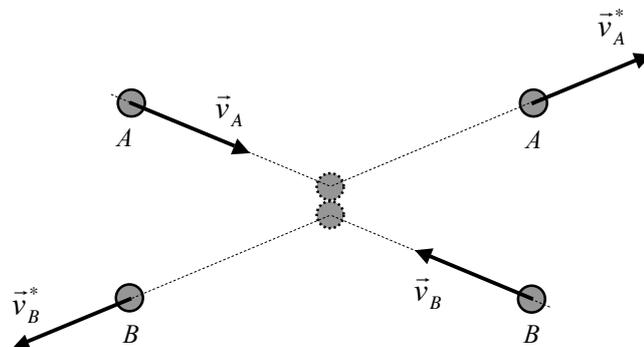
**Fig. 2 :** Il existe un référentiel dans lequel les billes ont, *avant la collision*, des vitesses de mêmes normes et de sens opposés.



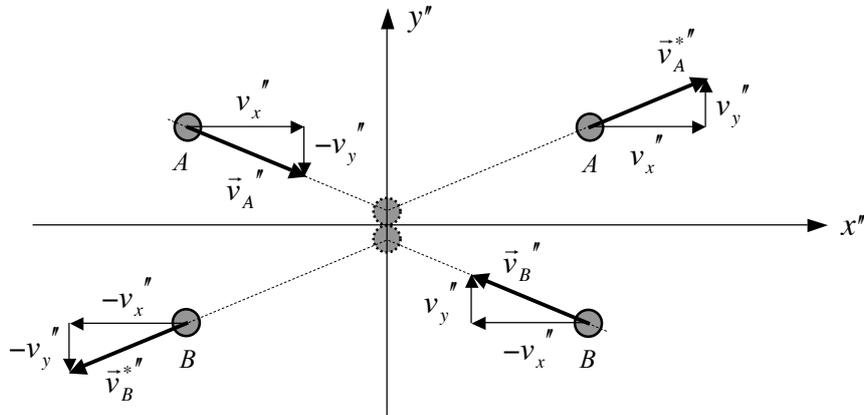
Il résulte de la symétrie de cette situation par rapport aux vitesses, que la quantité de mouvement totale des deux billes doit être nulle. Les deux billes identiques ont alors des quantités de mouvement de mêmes normes et de sens opposés *avant la collision*. Ceci reste vrai après la collision, par le principe de conservation de la quantité de mouvement. Les vitesses des deux billes sont donc elles aussi de mêmes normes et de sens opposés *après la collision* et de même normes qu'avant la collision (fig. 3).

**Fig. 3 :** Après la collision, les billes ont aussi des vitesses de mêmes normes et de sens opposés. Les normes des vitesses sont les mêmes avant la collision qu'après celle-ci :

$$v_A = v_B = v_A^* = v_B^*$$

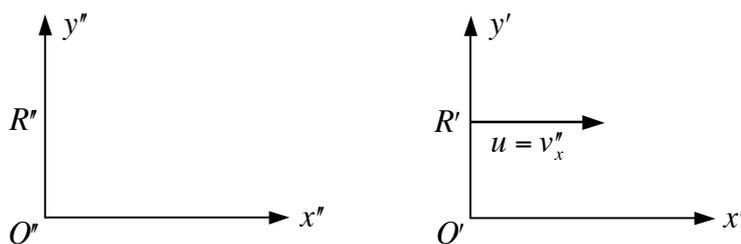


Dans un souci de clarté pour la suite de cet exposé, nous désignerons par le symbole  $R''$ , le référentiel associé à la figure 3 et par  $(O'', x'', y'')$ , tout repère dans ce référentiel. Nous pouvons alors orienter notre repère  $(O'', x'', y'')$  de sorte que la composante dans la direction  $x''$  de la vitesse de chaque particule garde le même signe durant la collision alors que la composante dans la direction  $y''$  change de signe d'une part et que les composantes des vecteurs vitesses soient toutes de mêmes normes dans chaque direction d'autre part (fig. 4).



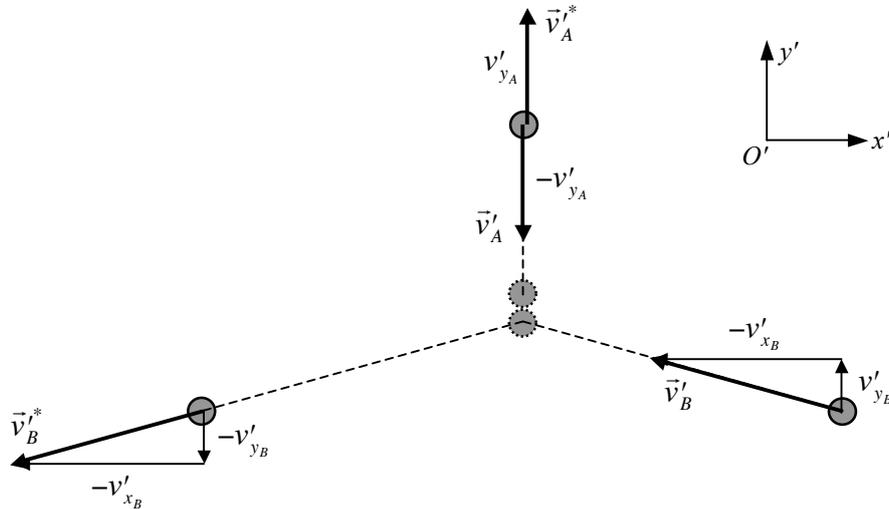
**Fig. 4 :** Repère dans lequel la composante dans la direction  $x''$  de la vitesse de chaque particule garde le même signe durant la collision alors que la composante dans la direction  $y''$  change de signe.

Nous nous proposons d'étudier la composante dans la direction  $y''$  de la quantité de mouvement totale et sa conservation dans la collision. Pour ce faire, on se place dans un référentiel dans lequel la bille  $A$  ne se déplace que dans la direction  $y''$ . C'est un référentiel, noté  $R'$ , qui se déplace vers la droite par rapport au référentiel  $R''$  de la figure 4, à une vitesse, notée  $u$ , égale à la composante dans la direction  $x''$  de la vitesse de la bille  $A$  dans  $R''$ , à savoir  $u = v_x''$  (fig. 5).



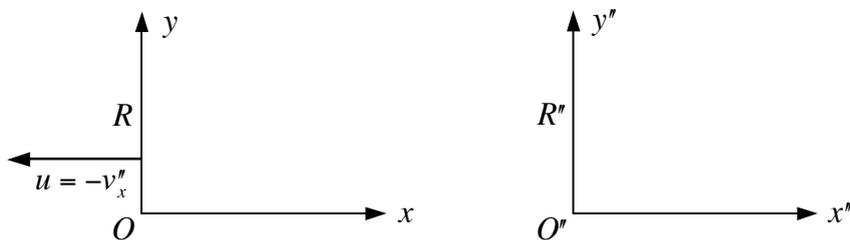
**Fig. 5 :** Le référentiel  $R'$  se déplace par rapport au référentiel  $R''$  de la figure 4, à une vitesse, notée  $u$ , égale à la composante dans la direction  $x''$  de la vitesse de la bille  $A$  dans  $R''$ , à savoir  $u = v_x''$ .

La collision dans  $R'$  est représentée sur la figure 6.



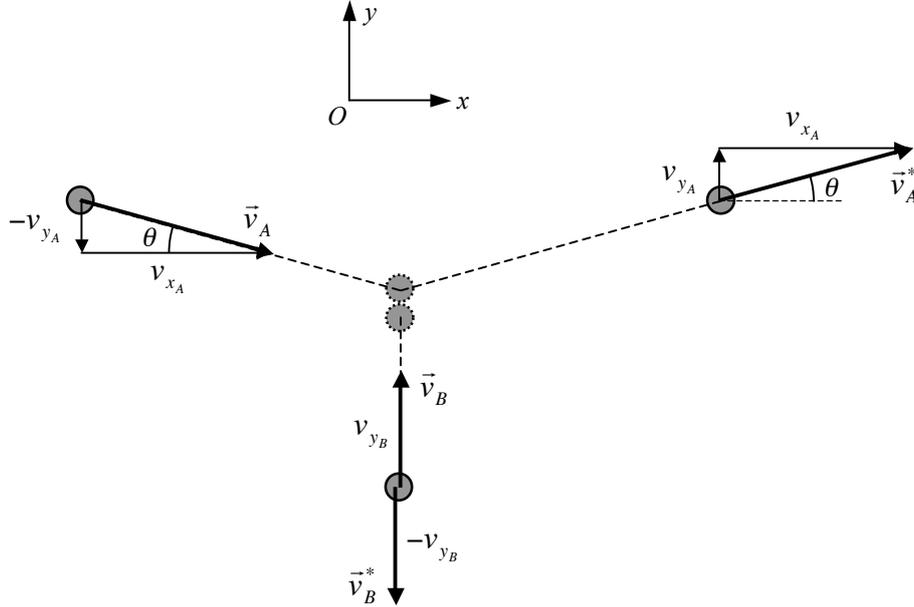
**Fig. 6 :** Référentiel  $R'$  dans lequel la bille  $A$  ne se déplace que dans la direction  $y$ .

Il existe également un référentiel dans lequel la bille  $B$  ne se déplace que dans la direction  $y$ . C'est un référentiel, noté  $R$ , qui se déplace vers la gauche par rapport au référentiel  $R'$  de la figure 4, à une vitesse, notée  $u$ , égale à la composante dans la direction  $x''$  de la vitesse de la bille  $B$  dans  $R''$ , à savoir  $u = -v''_x$  (fig. 7).



**Fig. 7 :** Le référentiel  $R$  se déplace par rapport au référentiel  $R''$  de la figure 4, à une vitesse, notée  $u$ , égale à la composante dans la direction  $x''$  de la vitesse de la bille  $B$  dans  $R''$ , à savoir  $u = -v''_x$ .

La collision dans  $R$  est représentée sur la figure 8.



**Fig. 8 :** Référentiel  $R$  dans lequel la bille  $B$  ne se déplace que dans la direction  $y$ .

Dans ce référentiel  $R$ , la norme de la composante dans la direction  $y$  de la vitesse de chaque bille, est la même avant et après la collision (c.f. Annexe 2) :

$$\begin{aligned} \|\vec{v}_{y_A}\| &= |-v_{y_A}| = v_{y_A} = \|\vec{v}_{y_A}^*\| \\ \|\vec{v}_{y_B}\| &= v_{y_B} = |-v_{y_B}| = \|\vec{v}_{y_B}^*\| \end{aligned}$$

Les "\*" ci-dessus signifient après la collision. On remarque que les situations illustrées par les figure 6 et 8 sont parfaitement symétriques.

Bien que  $\|\vec{v}_A\|$ , la norme du vecteur vitesse de la bille  $A$  de la figure 8, soit arbitrairement proche de  $c$ , nous pouvons choisir la rencontre de sorte que la bille heurtée (la bille  $B$  de la figure 8) ait une vitesse aussi faible que nous le souhaitons, autant avant qu'après la collision. (Nous démontrons dans l'annexe 2 la possibilité de ce choix). Sa quantité de mouvement avant et après la collision sera donc donnée par l'expression newtonienne  $p = mv$  qui sera une approximation aussi bonne qu'on le voudra. Soulignons que dans cette dernière expression,  $m$  est la masse qui est invariante en dynamique newtonienne. C'est ainsi que nous faisons le lien entre les quantités de mouvement classique et relativiste.

La suite du développement permet d'obtenir de manière assez directe, la quantité de mouvement relativiste. Une autre démarche est développée dans l'annexe 3, moins directe mais qui mérite cependant d'être présentée.

Nous voyons sur la figure 8 que la composante horizontale de la vitesse de la bille  $A$  est la même avant et après le choc. Il en est donc de même pour sa quantité de mouvement (relativiste). La vitesse de la bille  $B$  étant verticale avant et après le choc, il en est de même pour sa quantité de mouvement. Ainsi, la conservation de la quantité de mouvement est déjà satisfaite dans la direction horizontale. Il n'est donc nécessaire de postuler la conservation de la quantité de mouvement que dans la direction verticale. Comme par hypothèse, la quantité de mouvement relativiste est un vecteur de même direction et de même sens que le vecteur vitesse, la valeur absolue de la composante verticale de la quantité de mouvement de la bille  $A$  avant et après le choc est  $|p_{y_A}| = p_A \sin \theta$ . Si la quantité de mouvement totale (dans la direction verticale) est conservée lors du choc, on a :

$$\begin{aligned} P_y &= P_y^* \\ -p_A \sin \theta + mv_B &= p_A \sin \theta - mv_B \\ 2p_A \sin \theta &= 2mv_B \\ p_A \sin \theta &= mv_B \end{aligned}$$

Mais, de la symétrie des figures 6 et 8, on sait que  $v_B = v'_A$  où  $v'_A$  s'obtient à partir de  $v_A$  par la formule de composition relativiste des vitesses entre les référentiels  $R$  et  $R'$ , où  $R'$  se déplace à la vitesse  $u$  dans la direction des  $x$  positifs par rapport à  $R$ . Rappelons cette formule pour la composante verticale de la vitesse :

$$v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_x u}{c^2}}$$

En appliquant cette formule à notre situation, on obtient :

$$v'_A = \frac{v_A \sin \theta \sqrt{1 - \frac{(v_A \cos \theta)^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_A \cos \theta v_A \cos \theta}{c^2}} = \frac{v_A \sin \theta}{\sqrt{1 - \frac{v_A^2 \cos^2 \theta}{c^2}}}$$

En substituant ce résultat dans la dernière équation issue de la conservation de la quantité de mouvement où  $v_B = v'_A$ , on obtient :

$$\begin{aligned} p_A \sin \theta &= m \frac{v_A \sin \theta}{\sqrt{1 - \frac{v_A^2 \cos^2 \theta}{c^2}}} \\ p_A &= \frac{mv_A}{\sqrt{1 - \frac{v_A^2 \cos^2 \theta}{c^2}}} \end{aligned}$$

Rappelons que pour obtenir ce résultat, il a fallu faire l'hypothèse que la bille  $B$  ait une vitesse aussi faible que nous le souhaitions, autant avant qu'après la collision. Nous montrons dans l'annexe 2 que la bille  $B$  a une vitesse d'autant plus faible que l'angle  $\theta$  est petit. Ainsi, le résultat exact pour  $p_A$  est celui pour lequel  $\theta = 0$  :

$$p_A = \frac{mv_A}{\sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}}$$

En omettant l'indice  $A$ , on a :

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ou, sous forme vectorielle :

$$\boxed{\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

On peut avantageusement exprimer cette quantité de mouvement d'une autre manière :

$$\vec{p} = \frac{m \frac{d\vec{r}}{dt}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m \frac{d\vec{r}}{dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Mais, on se rappelle que le dénominateur  $dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  n'est autre que l'intervalle de temps propre  $d\tau$ , mesuré dans le référentiel de la particule. Ainsi, la quantité de mouvement peut s'écrire :

$$\boxed{\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{d\tau}} \tag{1}$$

avec :

- $\vec{p}$  : le vecteur quantité de mouvement relativiste de la particule, où  $[\|\vec{p}\|] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- $m$  : la masse de la particule, en kg
- $\vec{r}$  : le vecteur position de la particule, où  $[\|\vec{r}\|] = \text{m}$
- $\tau$  : le temps propre de la particule, en s

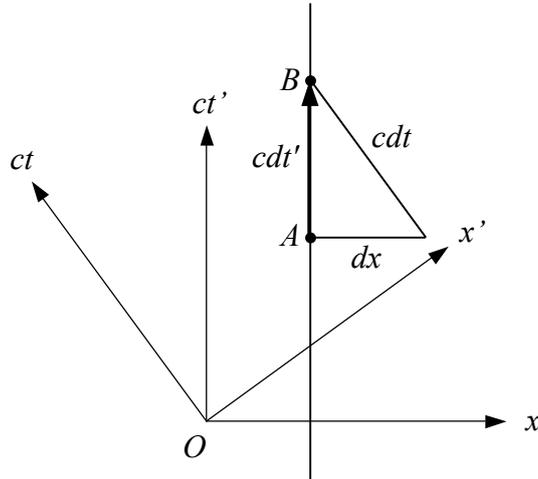
Remarques :

- a) L'étude développée jusqu'ici montre clairement que la quantité  $m$  apparaissant dans l'expression de la quantité de mouvement relativiste est *la masse de la physique newtonienne*. La masse  $m$  de tout objet est donc une constante indépendante de la vitesse, de la position et de l'instant associés à cet objet. Ainsi, la masse  $m$  est un invariant relativiste, au même titre que l'intervalle  $ds$  et la vitesse de la lumière dans le vide,  $c$ .
- b) La comparaison de l'expression newtonienne de la quantité de mouvement  $\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt}$  et de son expression relativiste  $\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{d\tau}$  montre que leur différence doit être entièrement attribuée à la différence entre le temps  $dt$  du laboratoire par rapport auquel la particule se déplace et le temps propre  $d\tau$  de la particule. À nouveau, nous remarquons que pour une particule de vitesse faible par rapport à  $c$ ,  $d\tau \approx dt$  et  $\vec{p}_{relativiste} \approx \vec{p}_{classique}$ .
- c) Soulignons le caractère particulier de la situation qui nous a permis d'obtenir l'expression de la quantité de mouvement relativiste ; un choc élastique entre deux particules de mêmes masses. La portée des raisonnements que nous avons menés n'est donc pas générale mais l'expression obtenue satisfait au moins une propriété requise, à savoir qu'elle se réduit à la quantité de mouvement classique à faible vitesse. Ce sont les expériences qui doivent confirmer la validité de l'expression obtenue.
- d) La quantité de mouvement relativiste  $\vec{p}$  et le déplacement  $\Delta\vec{r}$  ont en commun la propriété d'avoir des composantes transversales (dans les directions  $Oy$  et  $Oz$ ) qui ne dépendent pas du mouvement de l'observateur. Autrement dit, ces composantes transversales ont la même valeur dans tous les référentiels d'inertie. La raison en est bien simple ; on obtient la quantité de mouvement en multipliant le déplacement (dont les composantes sont  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ) par le facteur  $m/d\tau$  qui garde la même valeur dans tous les référentiels d'inertie, tout comme les composantes transversales du déplacement  $\Delta y$  et  $\Delta z$ .

## Le quadrivecteur énergie-quantité de mouvement et l'énergie relativiste

### Le quadrivecteur énergie-quantité de mouvement

Pour considérer la quantité de mouvement et l'énergie comme des éléments d'une unité plus large, il est utile de se rappeler comment nous avons considéré l'espace et le temps comme des éléments d'une unité plus large. Considérons la ligne d'univers d'une particule (qui pour simplifier, se déplace à vitesse constante) par rapport à un référentiel  $R$  et deux événements voisins  $A$  et  $B$  sur cette ligne d'univers. Le *quadrivecteur* déplacement  $AB$  qui lie les événements  $A$  et  $B$  est le concept qui crée l'unité. Les composantes dans  $R$  de ce quadrivecteur sont  $cdt$  pour la composante temporelle et  $dx, dy, dz$  pour les composantes spatiales. Leurs valeurs *dépendent du référentiel d'inertie* par rapport auquel elles sont mesurées. En revanche, l'intervalle  $ds$  entre les événements  $A$  et  $B$  est invariant ; sa valeur est *la même dans tous les référentiels d'inertie*. Ceci est illustré sur un diagramme d'espace-temps de Loedel (fig. 11).



**Fig. 11 :** Composantes spatiale et temporelle dans les référentiels  $R$  (le laboratoire) et  $R'$  (le référentiel propre de la particule) du quadrivecteur déplacement  $AB$ .

Remarquons de plus que dans le référentiel propre  $R'$  de la particule, les composantes spatiales  $dx'$ ,  $dy'$  et  $dz'$  du quadrivecteur déplacement  $AB$  sont nulles. Par conséquent :

$$(ds')^2 = (cdt')^2 - 0 - 0 - 0$$

d'où :

$$ds' = cdt'$$

On notera par la suite le temps propre  $dt'$  de la particule,  $d\tau$ . Ainsi :

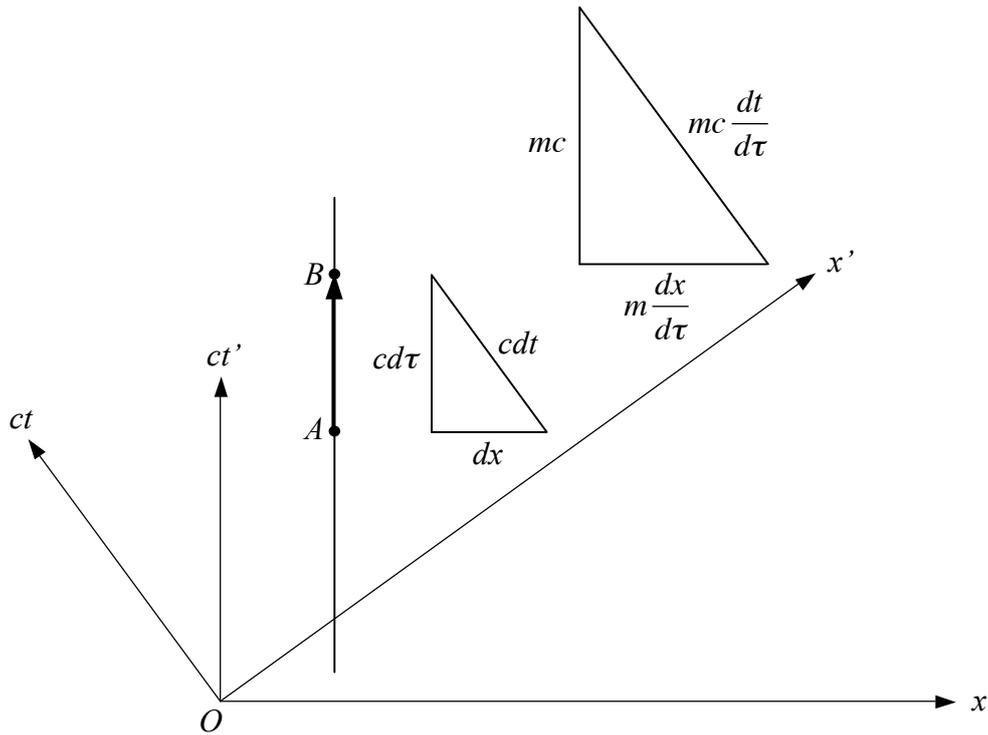
$$\boxed{ds' = cd\tau} \quad (2)$$

Dans le référentiel propre de la particule, l'intervalle  $ds'$  entre deux événements  $A$  et  $B$  de sa ligne d'univers est proportionnel à la durée propre  $d\tau$  entre ces deux événements. La durée propre est donc une grandeur invariante.

Nous allons maintenant *construire* à partir d'un quadrivecteur déplacement  $AB$  et de ses composantes  $cdt$ ,  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , un quadrivecteur tel que sa composante spatiale soit la quantité de mouvement relativiste puis nous *montrons* que sa composante temporelle n'est autre que l'énergie relativiste. Ce quadrivecteur portera ainsi le nom de *quadrivecteur énergie-quantité de mouvement*, noté  $\left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$ .

Considérons sur la ligne d'univers d'une particule, deux événements  $A$  et  $B$  dont le quadrivecteur déplacement  $AB$  a pour composantes  $cdt$  et  $dx$  dans le référentiel  $R$  par rapport auquel la particule se déplace et dont l'intervalle entre  $A$  et  $B$  vaut  $ds = ds' = cd\tau$  (fig. 10).

Multiplions les composantes  $cdt$  et  $dx$  du quadrivecteur  $AB$  par un même facteur, de sorte à transformer la composante spatiale  $dx$  en une quantité de mouvement relativiste  $p = m \frac{dx}{d\tau}$ <sup>(1)</sup>. Ce facteur doit valoir  $\frac{m}{d\tau}$  où  $m$  est la masse la particule et  $d\tau$ , la durée propre entre les événements  $A$  et  $B$ . La multiplication de la composante temporelle  $cdt$  par ce même facteur donne  $mc \frac{dt}{d\tau}$ . La masse  $m$  et la durée propre  $d\tau$  étant toutes deux des grandeurs invariantes, le facteur  $\frac{m}{d\tau}$  est lui aussi une grandeur invariante. Par conséquent, le quadrivecteur déplacement  $AB = (cdt, dx)$  reste un quadrivecteur après multiplication de ses composantes par un même facteur invariant. On obtient l'intervalle associé à ce nouveau quadrivecteur en multipliant l'intervalle associé au quadrivecteur déplacement  $AB$  par le même facteur  $\frac{m}{d\tau}$ , ce qui donne  $\frac{m}{d\tau} c d\tau = mc$ . Ainsi, le nouveau quadrivecteur obtenu a pour composante spatiale (dans  $R$ )  $p = m \frac{dx}{d\tau}$ , pour composante temporelle (dans  $R$ )  $mc \frac{dt}{d\tau}$  et l'intervalle qui lui est associé vaut  $mc$  (dans  $R$  et  $R'$ ) (fig. 12).



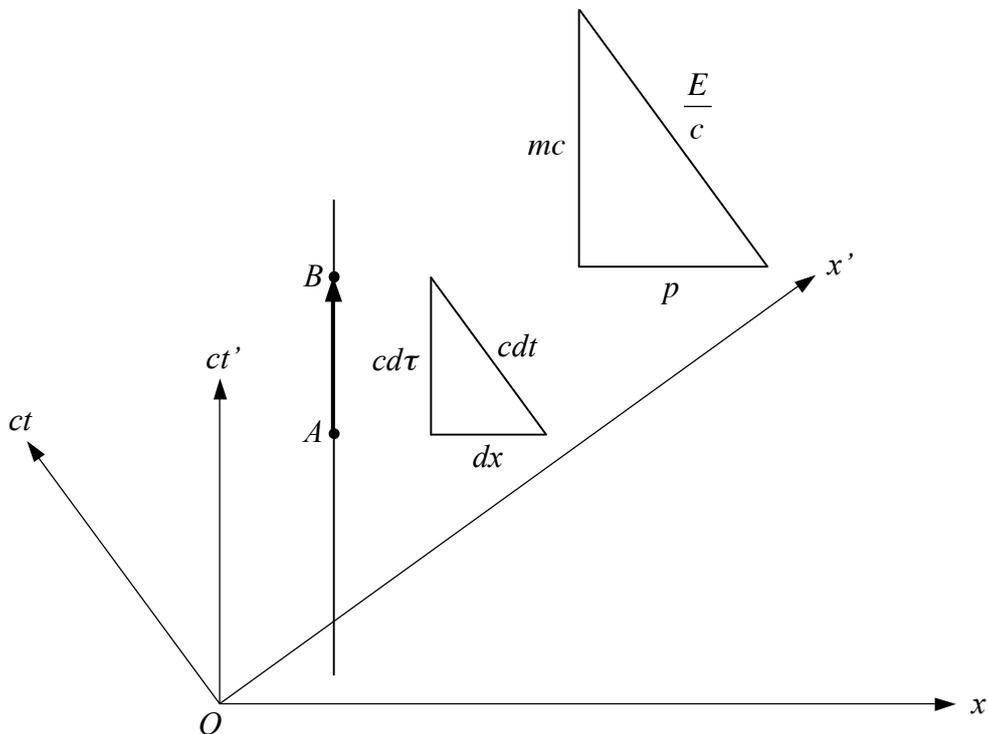
**Fig. 12 :** En multipliant les composantes spatiale et temporelle du quadrivecteur déplacement  $AB$  par la grandeur invariante  $m/d\tau$ , on obtient un quadrivecteur appelé quadrivecteur énergie-quantité de mouvement, dont la composante spatiale dans  $R$  est la quantité de mouvement relativiste.

<sup>(1)</sup> C'est en effet à l'aide de la composante spatiale du quadrivecteur déplacement  $AB$  que l'on peut obtenir une quantité de mouvement, du fait que cette dernière est une grandeur vectorielle  $(p_x, p_y, p_z)$  et que dans le cas général, seule la composante spatiale du quadrivecteur  $AB$  est aussi une grandeur vectorielle  $(dx, dy, dz)$ .

### L'énergie relativiste

Deux raisons nous permettent d'affirmer que cette composante temporelle est égale à  $\frac{E}{c}$  où l'on identifie  $E$  à l'énergie relativiste :

- les *unités* sont cohérentes car  $\left[ mc \frac{dt}{d\tau} \right] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{\text{J}}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} = \left[ \frac{E}{c} \right]$
- on peut montrer que  $E = mc^2 \frac{dt}{d\tau}$  est une *grandeur conservée* dans tout référentiel d'inertie (cette démonstration est faite dans la section suivante). D'où la figure (fig. 13) :



**Fig. 13 :** La composante temporelle du quadrivecteur énergie-quantité de mouvement est égale à  $E/c$  où l'on identifie  $E$  à l'énergie relativiste.

Ainsi, l'énergie relativiste est donnée par l'expression :

$$\boxed{E = mc^2 \frac{dt}{d\tau}} \quad (3)$$

Les éléments du développement qui vient d'être fait pour construire le quadrivecteur énergie-quantité de mouvement ainsi que les expressions de ses composantes dans l'espace-temps, apparaissent sur les figures 11, 12 et 13 ci-dessus.

### La conservation de l'énergie relativiste

Nous montrons dans cette partie que la conservation de la quantité de mouvement relativiste (cette conservation ayant été postulée) implique la conservation de l'énergie relativiste.

Pour ce faire, nous suivrons la démarche suivante ; nous cherchons d'abord les transformations qui relient la quantité de mouvement et l'énergie relativistes exprimées dans deux référentiels d'inertie différents. Puis, dans un souci de généralité, nous montrons que cette loi de transformation reste la même pour la quantité de mouvement et l'énergie *totales* d'un système. Finalement, nous montrons que la conservation de l'énergie relativiste totale *résulte* de la conservation de la quantité de mouvement relativiste totale.

▪ *Transformation de Lorentz de la quantité de mouvement et de l'énergie relativistes*

Dans la section précédente, nous avons construit le quadrivecteur énergie-quantité de mouvement en multipliant par l'invariant relativiste  $m/d\tau$  les composantes spatiale  $dx$  et temporelle  $cdt$  du quadrivecteur déplacement  $AB$  qui lie deux événements  $A$  et  $B$  de l'espace-temps. On a ainsi obtenu les relations suivantes entre ces deux quadrivecteurs et leurs composantes, qui sont rappelées dans le tableau suivant :

Quadrivecteur	Composante temporelle	Composante spatiale
Déplacement ( $cdt, dx$ )	$cdt$	$dx$
Energie-quantité de mouvement ( $\frac{E}{c}, p$ )	$\frac{E}{c} = \frac{m}{d\tau} cdt = mc \frac{dt}{d\tau}$	$p = \frac{m}{d\tau} dx = m \frac{dx}{d\tau}$

La transformation de Lorentz relie les coordonnées  $(ct, x)$  d'un événement de l'espace temps exprimées par rapport à un référentiel d'inertie  $R$ , aux coordonnées  $(ct', x')$  de ce même événement, exprimées par rapport à un autre référentiel d'inertie  $R'$  en mouvement uniforme par rapport au référentiel  $R$ . Cette transformation est évidemment identique pour les coordonnées  $(cdt, dx)$  dans  $R$  et  $(cdt', dx')$  dans  $R'$  (où  $dt, dt'$  sont des intervalles temporels et  $dx, dx'$ , des intervalles spatiaux).

Ainsi, la transformation de Lorentz de l'énergie et de la quantité de mouvement relativistes s'obtient simplement en multipliant par  $m/d\tau$  la transformation de Lorentz des composantes  $cdt$  et  $dx$ . Rappelons cette dernière transformation :

$$\begin{aligned} cdt' &= \gamma(cdt - \beta dx) \\ dx' &= \gamma(dx - \beta cdt) \end{aligned}$$

Multiplions-la par  $m/d\tau$  :

$$\begin{aligned} \frac{m}{d\tau} cdt' &= \gamma \left( \frac{m}{d\tau} cdt - \beta \frac{m}{d\tau} dx \right) \\ \frac{m}{d\tau} dx' &= \gamma \left( \frac{m}{d\tau} dx - \beta \frac{m}{d\tau} cdt \right) \end{aligned}$$

En substituant dans cette transformation les expressions de l'énergie et de la quantité de mouvement figurant dans le tableau ci-dessus, on obtient la transformation recherchée pour l'énergie et la quantité de mouvement relativistes :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{E'}{c} &= \gamma \left( \frac{E}{c} - \beta p \right) \\ p' &= \gamma \left( p - \beta \frac{E}{c} \right) \end{aligned}}$$

On remarque que cette transformation a exactement la même forme que la transformation de Lorentz des coordonnées  $(ct, x)$  d'un événement de l'espace-temps.

- *Transformation de Lorentz de la quantité de mouvement et de l'énergie relativistes totales d'un système*

Supposons que la  $i^{\text{ème}}$  particule d'un système de particule ait une énergie  $e_i$  et une quantité de mouvement  $p_i$  dans un référentiel d'inertie  $R$ . Dans un autre référentiel d'inertie  $R'$ , son énergie  $e'_i$  et sa quantité de mouvement  $p'_i$  sont donnés par la transformation de Lorentz de  $e_i$  et  $p_i$  obtenus ci-dessus :

$$\begin{aligned} \frac{e'_i}{c} &= \gamma \left( \frac{e_i}{c} - \beta p_i \right) \\ p'_i &= \gamma \left( p_i - \beta \frac{e_i}{c} \right) \end{aligned}$$

L'énergie totale  $E$  et la quantité de mouvement totale  $P$  du système de particules sont les sommes des énergies et des quantités de mouvement individuelles de toutes les particules du système :

$$\begin{aligned} \frac{E'}{c} &= \sum_i \frac{e'_i}{c} = \sum_i \gamma \left( \frac{e_i}{c} - \beta p_i \right) = \gamma \left( \sum_i \frac{e_i}{c} - \beta \sum_i p_i \right) = \gamma \left( \frac{E}{c} - \beta P \right) \\ P' &= \sum_i p'_i = \sum_i \gamma \left( p_i - \beta \frac{e_i}{c} \right) = \gamma \left( \sum_i p_i - \beta \sum_i \frac{e_i}{c} \right) = \gamma \left( P - \beta \frac{E}{c} \right) \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{E'}{c} &= \gamma \left( \frac{E}{c} - \beta P \right) \\ P' &= \gamma \left( P - \beta \frac{E}{c} \right) \end{aligned}}$$

Nous voyons que la transformation de Lorentz de l'énergie et de la quantité de mouvement relativistes totales d'un système de particule est identique à la transformation de Lorentz de ces deux grandeurs, pour une particule unique.

- *La conservation de l'énergie relativiste résulte de la conservation de la quantité de mouvement relativiste*

Considérons un système de particules dont l'énergie et la quantité de mouvement relativistes totales mesurées dans un référentiel d'inertie  $R$ , sont notées  $E$  et  $P$ . L'énergie et la quantité de mouvement relativistes totales de ce même système de particules, mesurées dans un autre référentiel d'inertie  $R'$  ont des valeurs différentes, notées  $E'$  et  $P'$ . Supposons qu'un événement particulier se produise au sein de ce système. Prenons comme exemple un système deux particules libres qui entrent en collision.

Exprimons la transformation de Lorentz de la quantité de mouvement totale du système *avant* l'événement particulier (à laquelle nous attribuerons l'indices 1) et *après* l'événement particulier (à laquelle nous attribuerons l'indices 2) :

$$P'_1 = \gamma \left( P_1 - \beta \frac{E_1}{c} \right) \text{ [avant l'événement]}$$

$$P'_2 = \gamma \left( P_2 - \beta \frac{E_2}{c} \right) \text{ [après l'événement]}$$

Développons le membre de droite de chacune de ces équations :

$$P'_1 = \gamma P_1 - \gamma \beta \frac{E_1}{c}$$

$$P'_2 = \gamma P_2 - \gamma \beta \frac{E_2}{c}$$

Réarrangeons les termes de ces deux équations :

$$P'_1 - \gamma P_1 = -\gamma \beta \frac{E_1}{c}$$

$$P'_2 - \gamma P_2 = -\gamma \beta \frac{E_2}{c}$$

La conservation de la quantité de mouvement dans tout référentiel d'inertie implique que  $P'_1 = P'_2$  et  $P_1 = P_2$ . Par conséquent, les membres de gauches des deux équations ci-dessus sont égaux et ainsi,  $E_1 = E_2$ . En effet :

$$-\gamma \beta \frac{E_1}{c} = P'_1 - \gamma P_1 = P'_2 - \gamma P_2 = -\gamma \beta \frac{E_2}{c}$$

$$\Rightarrow E_1 = E_2$$

Ainsi, *l'énergie relativiste est elle aussi conservée*. Soulignons que cette conservation vient d'être démontrée dans le cas général ; pour tout système physique et dans tout référentiel d'inertie.

## Relations entre énergie, quantité de mouvement, masse et vitesse

Le triangle que forme le quadrivecteur déplacement  $AB$  et ses composantes spatiale et temporelle est semblable au triangle que forme le quadrivecteur quantité de mouvement-énergie et ses composantes spatiale et temporelle (fig. 13). Par des considérations géométriques élémentaires sur ces deux triangles, on obtient différentes relations entre trois des quatre grandeurs que sont l'énergie, la quantité de mouvement, la masse et la vitesse (d'une particule).

### Invariance de l'intervalle associé au quadrivecteur quantité de mouvement-énergie (relation $E, p, m$ )

En appliquant le théorème de Pythagore au triangle de droite de la figure 13, on obtient la relation suivante entre la quantité de mouvement, l'énergie et la masse :

$$(mc)^2 + p^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2$$

ou encore :

$$\boxed{(mc)^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2} \quad (4)$$

Cette dernière expression donne le carré de l'intervalle associé au quadrivecteur énergie-quantité de mouvement  $\left(\frac{E}{c}, p\right)$ . Cette formule est l'analogue parfait de celle qui donne le carré de l'intervalle du quadrivecteur déplacement  $(cdt, dx)$  entre deux événements voisins de la ligne d'univers d'une particule :

$$ds^2 = (cdt)^2 - dx^2$$

Dans ces deux formules, le membre de gauche est un invariant alors que les deux termes du membre de droite, considérés individuellement dépendent du référentiel d'inertie dans lequel ils sont mesurés.

Conclusion :

- L'énergie relativiste  $E$  d'une particule de masse  $m$  est donnée par l'expression  $E = mc^2 \frac{dt}{d\tau}$ .
- L'énergie relativiste d'un système constitué de plusieurs particules libres de se mouvoir est la somme des énergies relativistes de chacune des particules.
- L'énergie relativiste est une grandeur *conservée* dans tout référentiel d'inertie.
- Les composantes du quadrivecteur quantité de mouvement-énergie  $\left(\frac{E}{c}, p\right)$  prises individuellement sont *conservées* dans tout référentiel d'inertie mais ne sont pas invariantes ; leurs valeurs dépendent du référentiel d'inertie par rapport auquel elles sont mesurées. En revanche, (le carré de) l'intervalle associé au quadrivecteur énergie-quantité

de mouvement, donné par l'expression  $(mc)^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2$ , est un *invariant* ; sa valeur est la même dans tous les référentiels d'inertie.

**Autre expression de la quantité de mouvement relativiste (relation  $p, m, v$ )**

De la relation d'homothétie entre les côtés des triangles semblables de la figure 13, on peut écrire :

$$\frac{p}{mc} = \frac{dx}{cd\tau}$$

où  $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$  (c.f. équation de dilatation des durée) avec  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ .

On obtient ainsi :

$$\boxed{p = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} mv \equiv \gamma mv} \tag{5}$$

**Autre expression de l'énergie relativiste (relation  $E, m, v$ )**

De la relation d'homothétie entre les côtés des triangles semblables de la figure 13, on peut écrire :

$$\frac{\frac{E}{c}}{mc} = \frac{cdt}{cd\tau}$$

D'où :

$$\boxed{E = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} mc^2 \equiv \gamma mc^2} \tag{6}$$

**Relation  $E, p, v$**

De la relation d'homothétie entre les côtés des triangles semblables de la figure 13, on peut écrire :

$$\frac{\frac{E}{c}}{p} = \frac{cdt}{dx}$$

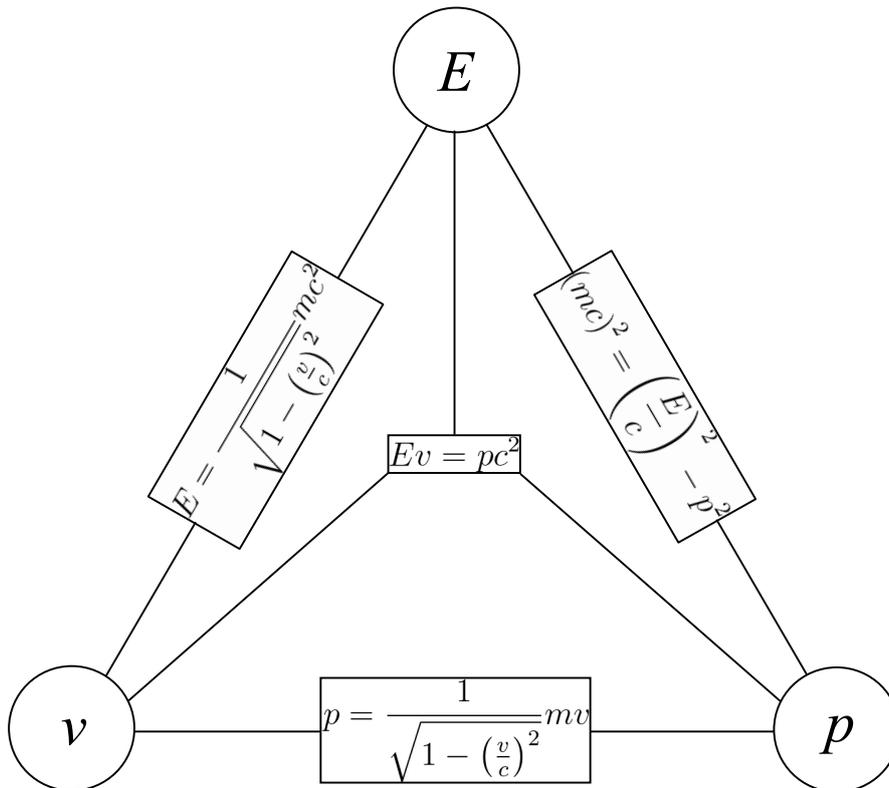
où par définition,  $\frac{dx}{dt} = v$ .

On obtient ainsi :

$$\boxed{Ev = pc^2} \tag{7}$$

Cette dernière relation se distingue des trois autres (c.f. équations (4), (5), (6)) dans le sens où elle ne fait pas intervenir la masse  $m$ .

Nous pouvons disposer ces quatre relations comme indiqué sur la sur la fig. 14, en plaçant en son centre la dernière relation (7) pour la raison indiquée ci-dessus.



**Fig. 14 :** Relations entre les grandeurs  $E$ ,  $p$ ,  $v$ . Chaque équation est connectée aux grandeurs qu'elle met en relation. L'équation au centre de la figure se distingue des trois autres pour deux raisons ; elle ne fait pas intervenir la masse  $m$  d'une part et elle met en relation les trois grandeurs  $E$ ,  $p$ ,  $v$  d'autre part.

## Énergie au repos et énergie cinétique relativiste

Pour une particule au repos, on a :

$$v = 0 \Rightarrow \gamma = 1$$

Ce qui d'après (6) donne :

$$E = mc^2 \equiv E_0$$

Ainsi, l'énergie au repos  $E_0$  d'une particule n'est pas nulle et est proportionnelle à sa masse :

$$\boxed{E_0 = mc^2} \quad (8)$$

Cette équation est l'une des plus célèbres de l'histoire de la physique. Elle exprime l'équivalence de la masse et de l'énergie.

L'énergie relativiste totale  $E$  d'une particule est constituée de deux parties :

- Son énergie au repos  $E_0 = mc^2$
- Une énergie supplémentaire associée à son mouvement, c'est à dire son énergie cinétique  $E_c$ .

Ainsi :

$$E = E_0 + E_c$$

D'où :

$$E_c = E - E_0 = \gamma mc^2 - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2$$

Ainsi, l'énergie cinétique relativiste d'une particule est donnée par l'expression :

$$\boxed{E_c = (\gamma - 1)mc^2} \quad (9)$$

## Dynamique relativiste et collisions inélastiques

Nous appliquons dans cette section les principes de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement à la situation d'une collision inélastique, afin d'étudier et comparer la masse totale initiale du système à sa masse totale finale. Nous obtiendrons alors une nouvelle propriété physique qui n'avait jamais été découverte ni même imaginée en physique classique.

Considérons une masse glissant sans frottement sur un plan horizontal et qui entre en collision avec une autre masse initialement immobile. Supposons que les deux masses restent collées l'une à l'autre après la collision. Une partie de l'énergie initiale de ce système se transforme en chaleur pendant la collision, une autre partie se transforme en énergie cinétique de rotation des deux masses collées qui tournent autour de leur centre de masse, ou en toute autre forme d'énergie interne du système final.

Pour calculer la masse finale de ce système, on applique :

le principe de conservation de l'énergie

$$\begin{aligned} E^* &= E \\ &= E_1 + E_2 \\ &= E_1 + m_2 c^2 \end{aligned} \quad (\text{I})$$

le principe de conservation de la quantité de mouvement

$$\begin{aligned} P^* &= P \\ &= p_1 + p_2 \\ &= p_1 \end{aligned} \quad (\text{II})$$

la relation masse-énergie-quantité de mouvement (c.f. équation (4))

$$(m^*)^2 c^4 = (E^*)^2 - (P^*)^2 c^2 \quad (\text{III})$$

où, dans ces trois équations, le symbole "\*" signifie "après la collision" et les indices 1 et 2 concernent la masse 1, respectivement 2, avant la collision.

En substituant (I) et (II) dans (III), on obtient :

$$\begin{aligned} (m^*)^2 c^4 &= (E_1 + m_2 c^2)^2 - p_1^2 c^2 \\ &= E_1^2 - p_1^2 c^2 + 2E_1 m_2 c^2 + m_2^2 c^4 \end{aligned}$$

En utilisant dans le membre de droite, la relation (4) et en exprimant l'énergie totale ( $E_1$ ) de la masse 1 comme la somme de son énergie au repos ( $m_1 c^2$ ) et de son énergie cinétique ( $E_{C_1}$ ), on a :

$$(m^*)^2 c^4 = m_1^2 c^4 + 2(m_1 c^2 + E_{C_1}) m_2 c^2 + m_2^2 c^4$$

Après développement, regroupement et simplification, on obtient :

$$\begin{aligned}(m^*)^2 &= (m_1 + m_2)^2 + \frac{2}{c^2} E_{c_1} m_2 > (m_1 + m_2)^2 \\ \Rightarrow m^* &> m_1 + m_2\end{aligned}$$

La masse du système final aggloméré est supérieure à la somme des masses initiales ! Elle est d'autant plus grande que l'énergie cinétique initiale est grande. Ainsi, dans cette collision inélastique, de l'énergie cinétique s'est transformée en (énergie de) masse. Cette augmentation de masse du système mesure exactement la quantité d'énergie du système initial qui s'est transformée en énergie interne du système final au cours de la collision.

### Application numérique

Évaluons l'augmentation de masse trouvée ci-dessus pour des valeurs numériques usuelles à l'échelle macroscopique, pour les masses et les vitesses. Donnons d'abord l'expression du rapport entre l'augmentation de masse et la masse initiale du système.

$$\begin{aligned}\frac{\Delta m}{m} &= \frac{m^* - m}{m} = \frac{m^*}{m} - 1 = \frac{m^*}{m_1 + m_2} - 1 \\ &= \frac{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 + \frac{2}{c^2} E_{c_1} m_2}}{m_1 + m_2} - 1 = \sqrt{1 + \frac{2}{c^2} \frac{E_{c_1} m_2}{(m_1 + m_2)^2}} - 1\end{aligned}$$

En explicitant l'énergie cinétique ci-dessus avec  $E_c = (\gamma - 1)mc^2 \equiv \left( \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right) mc^2$ , on

obtient finalement :

$$\frac{\Delta m}{m} = \sqrt{1 + 2 \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - (v_1/c)^2}} - 1 \right)} - 1$$

Pour les valeurs numériques, considérons des masses égales :  $m_1 = m_2$ . Prenons comme vitesse initiale de la masse  $m_1$ , la vitesse du son dans l'air :  $v_1 = 3 \cdot 10^2$  m/s. La substitution de ces valeurs dans l'expression ci-dessus donne :

$$\frac{\Delta m}{m} = 10^{-13}$$

L'augmentation de masse du système représente une fraction infime de sa masse initiale, à savoir un dix millième de milliardième ! Admettons que l'on puisse mesurer des masses avec une précision de  $10^{-3}$  g, c'est à dire  $\Delta m = 10^{-6}$  kg. Calculons la valeur minimale de la masse du système initial, qui permet de mesurer son augmentation de masse après la collision.  $m = 10^{13} \Delta m = 10^{13} \cdot 10^{-6}$  kg =  $10^7$  kg =  $10^4$  tonnes. Ainsi, chaque masse doit avoir une masse d'au moins 5000 tonnes pour pouvoir mesurer une augmentation de leur masse d'au moins 1

milligramme, une fois agglomérées après leur collision ! Nous comprenons avec cet exemple, pourquoi ces phénomènes de variation de masse sont complètement imperceptibles avec des masses et des vitesses usuelles.

Calculons encore une donnée intéressante pour cette situation de collision inélastique. Nous avons obtenu ci-dessus une valeur absolument négligeable du rapport  $\Delta m/m$ , pour des valeurs usuelles des masses et de la vitesse de la masse incidente. Toujours pour deux masses identiques, calculons la vitesse à laquelle la première masse doit percuter la deuxième masse immobile pour que le rapport  $\Delta m/m$  ait une valeur non négligeable, 10% par exemple.

Pour deux masses identiques, l'expression obtenue plus haut est indépendante de la valeur des deux masses et se réduit à :

$$\frac{\Delta m}{m} = \sqrt{1 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - (v_1/c)^2}} - 1 \right)} - 1$$

Pour alléger cette expression et les calculs qui suivent, notons  $r \equiv \Delta m/m$  et  $\beta \equiv v_1/c$  :

$$r = \sqrt{1 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right)} - 1$$

De cette expression, on obtient :

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{(2r(r+2)+1)^2}}$$

En substituant dans cette expression la valeur  $r = 10\% = 0,1$ , on obtient le résultat  $\beta = 0,71 = 71\%$  c'est à dire  $v_1 = 0,71c$ . Ainsi, la masse incidente doit percuter la deuxième masse immobile à une vitesse valant 71% de la vitesse de la lumière pour que l'augmentation de masse du système représente une fraction non négligeable de sa masse initiale, c'est à dire 10%. Seules des particules subatomiques peuvent être accélérées à de telles vitesses, avec les énergies dont on dispose dans les accélérateurs de particules. Ce n'est donc que dans la physique des particules à haute énergie que ce phénomène relativiste de transformation d'énergie en masse est non négligeable.

Calculons encore la masse maximale pouvant être accélérée à cette vitesse ( $0,71c$ ) avec le plus grand accélérateur de particule actuel, le LHC du CERN, capable de délivrer une énergie maximale de 7 TeV ( $7 \cdot 10^{12}$  électronvolts).

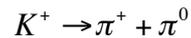
De la relation  $E = 1/\sqrt{1 - \beta^2} mc^2$ , on a :

$$m = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{c^2} E$$

avec  $\beta = 0,71$  et  $E = 7 \text{ TeV} = 1,12 \cdot 10^{-6} \text{ J}$ , on obtient la valeur  $m = 8,76 \cdot 10^{-24} \text{ kg}$ , ce qui représente environ 5246 fois la masse du proton, c'est à dire environ 18 fois la masse de

l'élément chimique le plus lourd du tableau périodique des éléments, l'Ununoctium, (symbole Uuo) de numéro atomique 118 et de masse atomique 294.

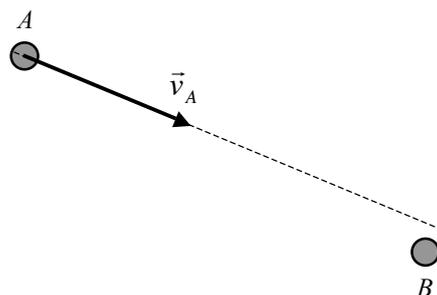
Terminons cette section en mentionnant qu'il existe aussi des processus au cours desquels, au contraire, la masse finale du système est inférieure à sa masse initiale. C'est par exemple le cas où une particule se désintègre en deux autres particules dont la somme des masses est inférieure à la sienne. Un exemple d'une telle désintégration est celle du méson- $K$  ( $K^+$ ) dont la masse est égale à 967 fois celle de l'électron et qui se désintègre en  $10^{-8}$  secondes pour donner un méson-pi positif ( $\pi^+$ ), dont la masse est 273 fois celle de l'électron et un méson-pi neutre ( $\pi^0$ ), dont la masse est 264 fois celle de l'électron. Ainsi,  $273 + 264 = 537 < 967$ .



## Annexe 1 : Référentiel dans lequel les billes ont des vitesses opposées

Nous montrons ici qu'il existe un référentiel dans lequel les billes ont, *avant la collision* représentée sur la figure 1, des vitesses de mêmes normes et de sens opposés, telles qu'illustrées sur la figure 2. Il suffit pour cela d'effectuer deux changements successifs de référentiel. Nous appellerons *laboratoire*, le référentiel (noté  $R_L$ ) associé à la figure 1. Observons la situation de la figure 1 depuis un référentiel se déplaçant par rapport à  $R_L$ , à la même vitesse que la bille  $B$ . Dans ce référentiel, noté  $R_B$ , la bille  $B$  est immobile et seule la bille  $A$  se déplace, sur une trajectoire rectiligne qui en général ne passe pas par le centre de la bille  $B$  (c.f. fig. 17).

**Fig. 17 :** Dans le référentiel  $R_B$ , la bille  $B$  est immobile et seule la bille  $A$  se déplace, sur une trajectoire rectiligne qui en général ne passe pas par le centre de la bille  $B$ .



Observons ensuite la situation de la figure 17 depuis un référentiel se déplaçant par rapport au référentiel  $R_B$ , dans la même direction et le même sens que le mouvement de la bille  $A$ , mais à une vitesse inférieure à celle de la bille  $A$ . Dans ce référentiel, la bille  $A$  et la bille  $B$  se déplacent sur des trajectoires rectilignes parallèles, en se rapprochant l'une de l'autre. On peut choisir la vitesse (par rapport à  $R_B$ ) de ce troisième référentiel, de sorte que les normes des vitesses des billes  $A$  et  $B$  soient égales. Notons  $R''$  ce troisième référentiel, notation déjà utilisée précédemment. Ainsi, dans  $R''$ , les billes  $A$  et  $B$  se rapprochent l'une de l'autre sur des trajectoires parallèles (et non confondues en général) et à vitesses (de normes) égales.  $R''$  est le référentiel que nous recherchions, correspondant à la situation de la figure 2.

## Annexe 2 : Les paramètres dont dépend la vitesse de la bille heurtée

Nous explicitons ici les paramètres dont dépend la vitesse de la bille  $B$  de la figure 8 (appelée la bille heurtée) et montrons précisément ce que signifie "choisir la rencontre de sorte que la bille heurtée ait une vitesse aussi faible que nous le souhaitons, autant avant qu'après la collision."

Rappelons que le référentiel  $R$  de la figure 7 se déplace par rapport au référentiel  $R'$  de la figure 4, à une vitesse, notée  $u$ , égale à la composante dans la direction  $x''$  de la vitesse de la bille  $B$  dans  $R'$ , à savoir  $u = -v_x''$ . Il s'agit maintenant de trouver la composante dans la direction  $y$  des vitesses des billes  $A$  et  $B$  dans  $R$  à partir de leur vitesse dans  $R'$ .

### Étude et comparaison des valeurs absolues des composantes dans la direction $y$ des vitesses des billes $A$ et $B$ dans le référentiel $R$

La formule de composition relativiste des vitesses donne, dans une direction perpendiculaire à la vitesse relative de deux référentiels d'inertie  $R$  et  $R'$ , où  $R'$  se déplace par rapport à  $R$  à la vitesse  $\vec{u} = v_x \hat{i}$  (c.f. le chapitre cinématique relativiste) :

$$v_y' = \frac{v_y}{1 - v_x u/c^2} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

Dans le cas de la figure 7, il faut effectuer les substitutions suivantes :  $R \rightarrow R''$  ;  $R' \rightarrow R$  ;  $v_y' \rightarrow v_y$  ;  $v_y \rightarrow v_y''$  ;  $v_x \rightarrow v_x''$ , ce qui donne :

$$v_y = \frac{v_y''}{1 - v_x'' u/c^2} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

De la figure 4, on en déduit que dans cette formule, il faut

- pour la bille  $A$  :  
donner à  $v_x''$  une valeur positive (avant et après le choc) et à  $v_y''$  une valeur négative avant le choc (et positive après le choc)
- pour la bille  $B$  :  
donner à  $v_x''$  une valeur négative (avant et après le choc) et à  $v_y''$  une valeur positive avant le choc (et négative après le choc)

Il suit de ces considérations (avec la substitution  $u = -v_x''$ ), que pour la bille  $A$ , la composante dans la direction  $y$  de sa vitesse dans  $R$  vaut avant le choc :

$$v_{y_A} = \frac{-v_y''}{1 + \left(\frac{v_x''}{c}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{v_x''}{c}\right)^2}$$

Pour la bille  $B$ , la composante dans la direction  $y$  de sa vitesse dans  $R$  vaut avant le choc :

$$v_{yB} = \frac{v_y''}{1 - \left(\frac{v_x''}{c}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{v_x''}{c}\right)^2} = \frac{v_y''}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_x''}{c}\right)^2}}$$

Nous voyons qu'avant et après le choc, ces composantes sont pour chaque bille, de signes opposés et de mêmes valeurs absolues. D'autre part :

$$|v_{yA}| = \frac{v_y''}{1 + \left(\frac{v_x''}{c}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{v_x''}{c}\right)^2} = \frac{v_y''}{\underbrace{\left(1 + \left(\frac{v_x''}{c}\right)^2\right)}_{>1}} < v_y''$$

et

$$|v_{yB}| = \frac{v_y''}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_x''}{c}\right)^2}} = \underbrace{\gamma}_{>1} v_y'' > v_y''$$

d'où :

$$|v_{yA}| < v_y'' < |v_{yB}|$$

Dans  $R$ , la composante dans la direction  $y$  de la vitesse de la bille  $A$  est inférieure (en valeur absolue) à celle de la bille  $B$ . C'est bien ce qu'indique la figure 8.

### Étude de la vitesse de la bille $B$ dans le référentiel $R$

Nous avons vu ci-dessus que la (composante dans la direction  $y$  de la) vitesse de la bille  $B$  dans  $R$  vaut :

$$v_{yB} = \frac{v_y''}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_x''}{c}\right)^2}}$$

Exprimons cette vitesse en fonction de la norme  $v''$  et de la composante  $v_y''$  dans la direction  $y$  du vecteur vitesse dans  $R'$ . De la relation

$$v''^2 = v_x''^2 + v_y''^2$$

on obtient

$$1 - \frac{v_x''^2}{c^2} = 1 - \frac{v''^2 - v_y''^2}{c^2}$$

D'où :

$$v_{y_B} = \sqrt{\frac{c^2 v_y'^2}{c^2 + v_y'^2 - v^2}}$$

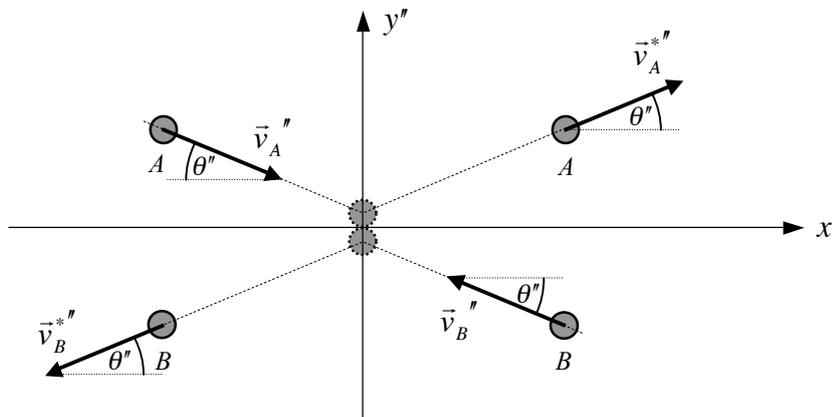
Pour toute valeur de  $v' < c$ , cette expression tend vers 0 si  $v_y'$  tend vers 0.

On peut exprimer cette condition à l'aide des coordonnées polaires ( $v'$  et  $\theta'$ ) du vecteur vitesse de la bille  $B$  dans  $R'$ , à l'aide de la relation

$$v_y' = v' \sin \theta'$$

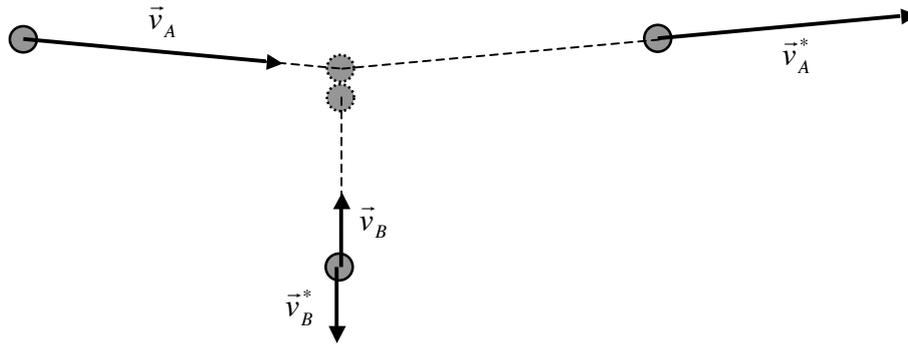
Pour toute valeur de  $v' < c$ ,  $v_{y_B}$  tend vers 0 si  $\theta'$  tend vers 0.

On voit maintenant clairement comment obtenir dans le référentiel  $R$ , une vitesse aussi faible qu'on le souhaite pour la bille  $B$  ; il faut que la collision entre les billes  $A$  et  $B$  dans le référentiel  $R'$  soit telle que l'angle  $\theta'$  que forment les vecteurs vitesses des billes avec l'abscisse  $x'$  du repère  $(O', x', y')$  dans  $R'$ , soit suffisamment petit (fig. 15).



**Fig. 15 :** Il faut que la collision entre les billes  $A$  et  $B$  dans le référentiel  $R'$  soit telle que l'angle  $\theta'$  que forment les vecteurs vitesses des billes avec l'abscisse  $x'$  du repère  $(O', x', y')$  soit suffisamment petit.

Cela signifie que le changement de direction des billes après le choc doit être suffisamment faible dans  $R'$ , ce qui dans le référentiel  $R$  correspond à une collision au cours de laquelle la bille  $A$  n'est presque pas déviée de sa trajectoire initiale, qui est presque perpendiculaire à celle de la bille  $B$ , comme nous allons le montrer ci-après. Un tel choc est communément désigné par le terme "rasant" ; les billes se frôlent (fig. 16).



**Fig. 16 :** Dans le référentiel  $R$ , la bille  $A$  n'est presque pas déviée de sa trajectoire initiale, qui est presque perpendiculaire à celle de la bille  $B$ .

- Relation entre l'angle  $\theta''$  dans le référentiel  $R''$  (fig. 15) et l'angle  $\theta$  dans le référentiel  $R$  (fig. 8 et fig. 16)

Nous montrons ici que si  $\theta''$  est petit dans  $R''$ , alors  $\theta$  est lui aussi petit dans  $R$ . Il faut donc chercher l'expression de  $\theta$  en fonction de  $\theta''$ .

Nous voyons sur la figure 8 que :

$$\tan \theta = \frac{|v_{y_A}|}{|v_{x_A}|}$$

Pour exprimer les composantes  $v_{x_A}$  et  $v_{y_A}$  du vecteur vitesse de la bille  $A$  dans  $R$  en fonction de ses composantes  $v''_x$  et  $v''_y$  dans  $R''$ , il faut utiliser la formule de composition relativiste des vitesses. Pour deux référentiels d'inertie  $R$  et  $R'$  en mouvement relatif, où  $R'$  se déplace à la vitesse  $u$  relativement à  $R$ , parallèlement à l'axe  $Ox$  et dans le sens des  $x$  positifs du repère lié à  $R$ , on a les relations suivantes entre les composantes de la vitesse d'un mobile, exprimées dans  $R$  et  $R'$  :

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{v_x u}{c^2}} \qquad v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_x u}{c^2}}$$

Dans notre situation, il faut effectuer les substitutions suivantes :  $R \rightarrow R''$  ;  $R' \rightarrow R$  ;  $v'_x \rightarrow v_{x_A}$  ;  $v'_y \rightarrow v_{y_A}$  ;  $v_x \rightarrow v''_x$  ;  $v_y \rightarrow v''_y$  ;  $u \rightarrow -v''_x$ , ce qui donne :

$$v_{x_A} = \frac{v'_x - (-v''_x)}{1 - \frac{v'_x(-v''_x)}{c^2}} = \frac{2v'_x}{1 + \frac{v_x'^2}{c^2}} \qquad v_{y_A} = \frac{v''_y \sqrt{1 - \frac{v_x'^2}{c^2}}}{1 + \frac{v_x'^2}{c^2}}$$

En substituant ces deux expressions pour le calcul de  $\theta$ , on obtient :

$$\tan \theta = \frac{v''_y}{2v''_x} \sqrt{1 - \left(\frac{v''_x}{c}\right)^2}$$

où  $v''_y/v''_x = \tan \theta''$ , ce qui donne :

$$\tan \theta = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{v''_x}{c}\right)^2} \tan \theta'' \Rightarrow \frac{\tan \theta}{\tan \theta''} = \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{1 - \left(\frac{v''_x}{c}\right)^2}}_{<1} < 1 \Rightarrow \frac{\theta}{\theta''} < 1 \text{ puisque } \theta, \theta'' \in [0, \pi/2]$$

Par conséquent :

$$\theta < \theta''$$

Donc, si  $\theta''$  est petit dans  $R''$ , alors  $\theta$  est lui aussi petit dans  $R$ , puisque  $\theta < \theta''$ . C'est ce que nous voulions démontrer.

### Étude de la vitesse de la bille $A$ dans le référentiel $R$

Nous avons montré qu'en passant du référentiel  $R''$  au référentiel  $R$ , la vitesse de la bille  $B$  dans  $R$  est aussi faible qu'on le souhaite si l'angle  $\theta''$  dans  $R''$  est suffisamment petit (c.f. fig. 15), ce qui nous permet de la considérer dans  $R$ , comme une particule non relativiste (ou classique). Nous avons aussi montré que dans  $R$ , la composante dans la direction  $y$  de la vitesse de la bille  $A$  est inférieure (en valeur absolue) à celle de la bille  $B$  ;  $|v_{y_A}| < v''_y < |v_{y_B}|$ . Mais, rappelons que nous voulons aussi que la vitesse de la bille  $A$  dans  $R$  puisse être aussi grande qu'on le souhaite, c'est à dire arbitrairement proche de  $c$  afin de pouvoir la considérer dans  $R$ , comme une particule relativiste. En supposant que la norme de la vitesse de la bille  $A$  soit arbitrairement proche de  $c$  dans  $R''$ , reste-t-elle arbitrairement proche de  $c$  dans  $R$  ? Nous montrons ici que c'est bien le cas.

Dans  $R$ , la norme de la vitesse de la bille  $A$  est donnée par :

$$\|\vec{v}_A\|^2 = v_{x_A}^2 + v_{y_A}^2$$

En substituant dans cette équation les expressions de  $v_{x_A}$  et  $v_{y_A}$  obtenues dans la section précédente, on obtient :

$$\|\vec{v}_A\|^2 = \left( \frac{2v_x''}{1 + \frac{v_x''^2}{c^2}} \right)^2 + \left( \frac{v_y'' \sqrt{1 - \frac{v_x''^2}{c^2}}}{1 + \frac{v_x''^2}{c^2}} \right)^2 = \frac{4v_x''^2}{\left(1 + \frac{v_x''^2}{c^2}\right)^2} + \frac{v_y''^2 \left(1 - \frac{v_x''^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{v_x''^2}{c^2}\right)^2} = \frac{4v_x''^2 + v_y''^2 - \frac{v_x''^2 v_y''^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{v_x''^2}{c^2}\right)^2}$$

D'où :

$$\|\vec{v}_A\| = \frac{\sqrt{4v_x''^2 + v_y''^2 - \left(\frac{v_x'' v_y''}{c}\right)^2}}{1 + \left(\frac{v_x''}{c}\right)^2}$$

Rappelons maintenant que pour que  $\|\vec{v}_B\| = v_{y_B}$  tende vers 0 (dans  $R$ ), il faut que  $v_y''$  tende vers 0 (dans  $R''$ ), ce qui implique que  $v_x''$  tend vers  $\|\vec{v}''\|$ . En effet,  $v'' \equiv \|\vec{v}''\| = \sqrt{v_x''^2 + v_y''^2} \rightarrow \sqrt{v_x''^2} = v_x''$  si  $v_y'' \rightarrow 0$ . Étudions l'implication de cette condition sur  $\|\vec{v}_A\|$ , en l'insérant dans son expression ci-dessus, c'est à dire en y substituant  $v_y'' = 0$  et  $v_x'' = v''$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned} \|\vec{v}_A\| &= \frac{2v''}{1 + \left(\frac{v''}{c}\right)^2} = \frac{2}{1 + \underbrace{\left(\frac{v''}{c}\right)^2}_{\in [1;2]}} v'' > v'' \\ &\Rightarrow \|\vec{v}_A\| > \|\vec{v}''\| \end{aligned}$$

Ainsi, nous constatons que si  $\|\vec{v}''\|$ , la norme de la vitesse de la bille  $A$  dans  $R''$  est arbitrairement proche de  $c$ , sa norme  $\|\vec{v}_A\|$  dans  $R$  est encore plus proche de  $c$  (et donc arbitrairement proche de  $c$ ) puisque  $\|\vec{v}_A\| > \|\vec{v}''\|$ , ce qui achève notre démonstration.

Remarquons encore que dans l'expression de  $\|\vec{v}_A\|$  obtenue ci-dessus, on a :

$$\|\vec{v}_A\| = \begin{cases} 2v'', & \text{si } v'' \ll c \\ c, & \text{si } v'' = c \end{cases}$$

Le premier cas correspond à la formule d'addition des vitesses non relativistes (c.f. fig. 15 avec  $\theta'' \rightarrow 0$ , fig. 7 et fig. 8) et le deuxième cas est en accord avec le 2<sup>ème</sup> postulat de la théorie de la relativité restreinte, qui stipule que la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels d'inertie, en l'occurrence  $R''$  et  $R$ .

Nous avons montré dans cette annexe 2, qu'une situation correspondant à la figure 1, où les vitesses initiales des billes peuvent être arbitrairement proches de la vitesse de lumière, peut toujours être observée depuis un référentiel dans lequel le choc a la symétrie illustrée par les figure 6 et 8, où nos deux exigences sont conjointement remplies, c'est à dire une bille  $A$  de vitesse arbitrairement proche de  $c$  (une particule relativiste) et une bille  $B$  de vitesse arbitrairement proche de 0 (une particule non relativiste ou classique).

### Annexe 3 : la quantité de mouvement relativiste – autre démarche

Rappelons que la démarche présentée précédemment s'appuie sur un résultat préalable de la relativité restreinte, la formule de composition relativiste des vitesses. La démarche présentée ici est moins directe que celle employée précédemment mais a le mérite de s'appuyer sur un résultat préalable de la relativité restreinte qui est fondamental. Il s'agit de l'invariance de l'intervalle (ou du temps propre qui lui est proportionnel). Nous développons ci-dessous cette deuxième démarche.

Dans notre situation, la quantité de mouvement de la bille  $B$  avant la collision est donnée par

$$p_B = mv_B = m \frac{\Delta y_B}{\Delta t_B}$$

où  $\Delta t_B$  est la durée nécessaire à la bille  $B$  pour franchir la distance  $\Delta y_B$  qui la sépare du lieu de la collision avec la bille  $A$ . Cette durée, mesurée dans le référentiel  $R$ , est aussi proche qu'on le désire de la durée propre, notée  $\Delta \tau_B$ , mesurée dans le référentiel propre de la bille  $B$ . Ainsi,

$$p_B = m \frac{\Delta y_B}{\Delta \tau_B}$$

Par la symétrie de la figure 8, on sait que la variation de la quantité de mouvement de la bille  $B$  au cours de la collision, est égale (en valeur absolue) au double de sa quantité de mouvement avant la collision :

$$|\Delta p_B| = 2p_B = 2m \frac{\Delta y_B}{\Delta \tau_B}$$

Or, par le principe de conservation de la quantité de mouvement, la variation de la quantité de mouvement de la bille  $A$  au cours de la collision est égale (en valeur absolue) à la variation de la quantité de mouvement de la bille  $B$  :

$$|\Delta p_A| = |\Delta p_B| = 2m \frac{\Delta y_B}{\Delta \tau_B}$$

Il faut maintenant exprimer  $|\Delta p_A|$  en fonction de quantités ne se rapportant qu'à la bille  $A$ . Comme le mouvement de la bille  $B$  dans  $R$  est identique à celui de la bille  $A$  dans  $R'$  (c.f. fig. 6 et 8), il en résulte que :

$$(\Delta y_B)_R = (\Delta y_A)_{R'}$$

D'autre part, comme tout déplacement transversal à la direction de la vitesse relative de deux référentiels d'inertie, garde la même valeur dans ces deux référentiels (la transformation de Lorentz ne modifie que les coordonnées colinéaires à la vitesse relative de deux référentiels d'inertie), le déplacement transversal de la bille  $A$  dans  $R'$   $(\Delta y_A)_{R'}$ , a la même valeur dans le référentiel  $R$  :

$$(\Delta y_A)_{R'} = (\Delta y_A)_R$$

D'où :

$$(\Delta y_B)_R = (\Delta y_A)_R \equiv \Delta y$$

Comme précédemment, du fait que le mouvement de la bille  $A$  dans  $R'$  est identique à celui de la bille  $B$  dans  $R$  (c.f. fig. 6 et 8), il en résulte que *le temps propre* nécessaire à l'une pour parcourir son trajet est égal à celui nécessaire à l'autre :

$$(\Delta \tau_A)_{R'} = (\Delta \tau_B)_R$$

D'autre part, l'invariance d'un intervalle  $\Delta s$  et par conséquent d'une durée propre  $\Delta \tau = \frac{\Delta s}{c}$ , permet d'écrire :

$$(\Delta \tau_A)_R = (\Delta \tau_A)_{R'}$$

D'où :

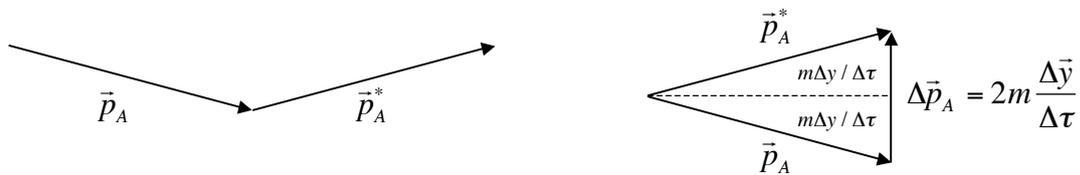
$$(\Delta \tau_A)_R = (\Delta \tau_B)_R \equiv \Delta \tau$$

Ainsi :

$$|\Delta p_A| = 2m \frac{\Delta y_A}{\Delta \tau_A}$$

qui est une expression ne faisant intervenir que des quantités relatives au mouvement de la bille  $A$  dans le référentiel  $R$ .

Il nous reste à trouver la quantité de mouvement  $p_A$  de la bille  $A$  dans la direction  $y$ , à partir de sa variation  $\Delta p_A$  que nous venons d'obtenir. Pour ce faire, traçons le triangle de composition des vecteurs quantité de mouvement de la bille  $A$ . Étant donnée la symétrie de la figure 8, les vecteurs quantité de mouvement de la bille  $A$  doivent être disposés de la manière suivante (fig. 9) :



**Fig. 9 :** Triangle de composition des vecteurs quantité de mouvement de la bille  $A$ .

Le petit côté de ce triangle isocèle nous est connu et vaut  $\Delta p_A = 2m \frac{\Delta y}{\Delta \tau}$ . En revanche, les deux grand côtés égaux valent chacun  $p_A = p_A^*$  et nous sont inconnus. Cependant, il existe un

autre triangle, semblable à celui-ci, dont tous les côtés nous sont connus ; c'est le triangle de composition des vecteurs position de la bille  $A$  (fig. 10) :

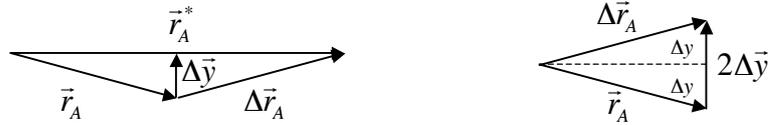


Fig. 10 : Triangle de composition des vecteurs position de la bille  $A$ .

Le raisonnement suivant prouve que ces deux triangles (triangles à droite des figures 9 et 10) sont bien semblables :

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \vec{r} \propto \vec{v} \Rightarrow \Delta \vec{r} // \vec{v} \\ \vec{v} // \vec{p} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta \vec{r} // \vec{p}$$

De plus, la symétrie de la figure 8 implique que les deux triangles sont isocèles. Si les deux triangles sont isocèles et que les deux grands côtés égaux et correspondants sont parallèles entre eux, alors les deux triangles sont semblables.

La relation d'homothétie entre les côtés de ces triangles semblables nous donne immédiatement l'expression de la quantité de mouvement de la bille  $A$ , qui rappelons-le a une vitesse arbitrairement proche de celle de la lumière :

$$p_A = m \frac{\Delta r_A}{\Delta \tau_A}$$

En passant des différences finies à la dérivée et en s'affranchissant des indices "A", on obtient :

$$p = m \frac{dr}{d\tau}$$

qui est l'expression de la quantité de mouvement relativiste. Vectoriellement, cette relation est donnée par :

$$\boxed{\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{d\tau}}$$

## Références

E. F. TAYLOR ET J. A. WHEELER – *A la découverte de l'espace temps*. Traduit par C. Roux. Dunod (1970).

KITTEL, KNIGHT, RUDERMAN – *Berkeley : cours de physique, volume 1 - mécanique*. Traduit par Pierre Lallemand. Armand Colin (1970).

JAMES H. SMITH – *Introduction à la relativité*. Traduit par Philippe Brenier. Ediscience (1973).

<http://public.web.cern.ch/public/fr/LHC/Facts-fr.html>

<http://fr.wikipedia.org/wiki/Ununoctium>