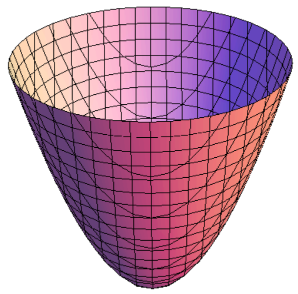
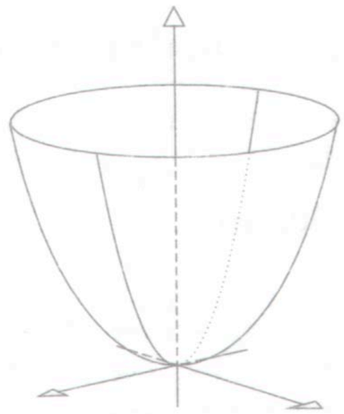
Surface d'un liquide en mouvement circulaire uniforme

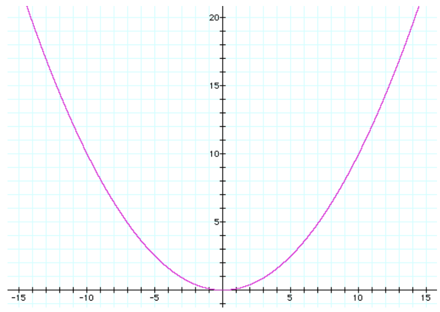
Par Pascal Rebetez

Octobre 2008

Considérons un récipient cylindrique contenant un liquide. Si l'on fait tourner ce récipient à vitesse angulaire constante autour de son axe, la surface libre du liquide est alors courbe. On peut montrer que cette surface est un paraboloïde de révolution à concavité dirigée vers le haut, dont l'axe est confondu avec celui du récipient. La section de ce paraboloïde par un plan vertical passant par cet axe est donc une parabole (c.f. fig. ci-dessous).



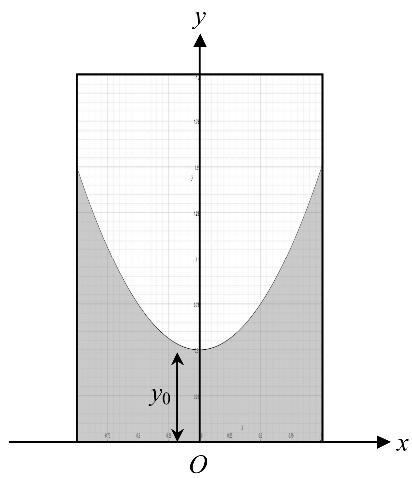




Dans un repère ayant pour axe des ordonnées celui de la parabole et l'origine au centre du fond du récipient, cette courbe a pour équation :

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + y_0 \qquad (1)$$

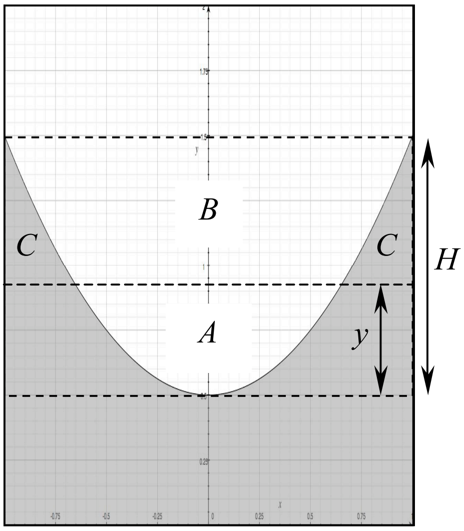
où ω est la vitesse angulaire de rotation du récipient, en rad/s, g, l'accélération gravitationnelle de la planète, en m/s^2 et y_0, la distance séparant le creux du paraboloïde du fond du récipient, en m (c.f. fig. ci-contre).



Quand le liquide est immobile, sa surface libre est un plan situé à une distance h du fond du récipient. L'équation (1) ne donne aucune information quant à la valeur de h ; autrement dit, nous ne savons pas où se positionne le paraboloïde de la surface du liquide en rotation, par rapport au plan du liquide immobile. Appelons ce plan le **plan initial** et cherchons sa position par rapport au paraboloïde.

Pour cette étude, il est plus simple de placer l'origine du repère sur le point le plus bas du paraboloïde. L'équation (1) devient alors :

$$y = \frac{\omega^2}{2g}x^2 \tag{2}$$



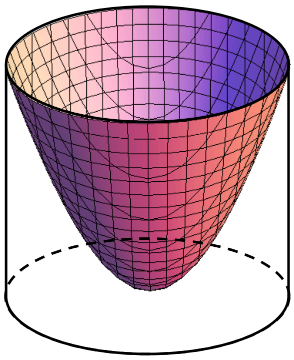
Le volume du liquide étant conservé (il est le même, que le liquide soit immobile ou en rotation), cela implique que le paraboloïde intercepte la position du plan initial d'une part et de sorte que le volume du paraboloïde situé sous le plan (volume A) soit égal au volume situé au-dessus du plan et compris entre le paraboloïde et le bord du récipient (volume C) d'autre part (c.f. fig. ci-contre). Nous cherchons donc la hauteur y du plan initial (par rapport au creux du paraboloïde) tel que :

$$A(y) = C(y) \tag{3}$$

Le volume d'un paraboloïde de révolution de hauteur H, dont la section (circulaire) est de rayon R, est donné par :

$$V = \frac{1}{2}\pi R^2 H$$

qui est la moitié du volume du cylindre circonscrit (c.f. fig. ci-dessous).



Explicitons le volume $C(y)$ de l'équation (3).

$$C(y) = \pi R^2 (H - y) - B(y) \tag{4}$$

$$B(y) = \frac{1}{2}\pi R^2 H - A(y) \tag{5}$$

En insérant (5) dans (4), on obtient :

$$C(y) = \pi R^2 (H - y) - \frac{1}{2} \pi R^2 H + A(y) \tag{6}$$

En insérant (6) dans (3), on obtient :

$$A(y) = \pi R^2 (H - y) - \frac{1}{2} \pi R^2 H + A(y) \tag{7}$$

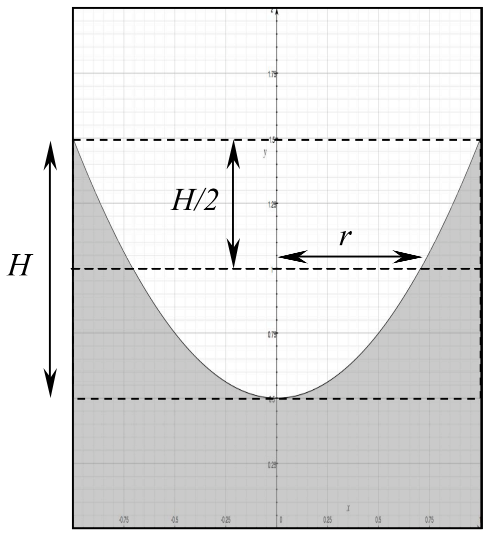
Ce qui après simplification donne :

$$H - y = \frac{H}{2} \tag{8}$$

Et finalement :

$$\boxed{y = \frac{H}{2}} \tag{9}$$

Le plan initial est situé à mi hauteur du paraboloïde (c.f. fig. ci-dessous).



L'intersection du paraboloïde et du plan initial est un cercle de rayon r (c.f. fig. ci-dessus). Recherchons maintenant ce rayon. Il doit satisfaire la condition :

$$y(r) = \frac{H}{2} \tag{10}$$

D'où :

$$\alpha r^2 = \frac{H}{2} \tag{11}$$

où pour alléger l'expression, nous avons posé :

$$\alpha \equiv \frac{\omega^2}{2g} \tag{12}$$

De (11), on obtient :

$$r = \sqrt{\frac{H}{2\alpha}} \tag{13}$$

On peut faire intervenir dans cette expression le rayon R du récipient à l'aide de la relation :

$$y(R) = H \tag{14}$$

C'est à dire :

$$\alpha R^2 = H \tag{15}$$

En insérant (15) dans (13), on obtient finallement :

$$\boxed{r = \frac{R}{\sqrt{2}}} \tag{16}$$

Le rayon du cercle d'intersection du paraboloïde et du plan initial, est indépendant de la vitesse angulaire de rotation du récipient. Il est en environ égal au 71 % du rayon du récipient (car $1/\sqrt{2} \approx 0{,}707$*).*

Quelle que soit la vitesse angulaire de rotation du récipient, le paraboloïde de la surface du liquide inercepte toujours le plan initial sur le même cercle.

En résumé, le plan de la surface libre d'un liquide contenu dans un récipient immobile, cylindrique et de rayon R, se transforme, lorsque le récipient est en rotation uniforme, en un paraboloïde de révolution dont la hauteur H dépend de la vitesse angulaire ω de rotation du récipient et de son rayon R, selon la relation :

$$H = \frac{\omega^2}{2g} R^2$$

Pour toute vitesse angulaire de rotation du récipient, le paraboloïde de la surface du liquide a la moitié de sa hauteur située en dessous du plan initial et intercepte celui-ci sur un cercle de rayon r qui ne dépend que du rayon R du récipient, selon la relation :

$$r = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

Tous les paraboloïdes passent par ce cercle horizontal, situé sur le plan initial. Ce cercle est donc un invariant de la surface du liquide.