MESURES ET INCERTITUDES

OBJECTIFS DE CE CHAPITRE :

- *Savoir exprimer une mesure avec* ***le bon nombre*** *de chiffres significatifs.*
- *Savoir* ***arrondir le résultat d'un calcul*** *avec le bon nombre de chiffres significatifs.*
- *Savoir exprimer et calculer les* ***incertitudes absolues et relatives*** *sur des grandeurs mesurées et calculées*

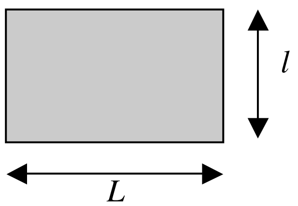
Contenu de ce chapitre :

3.1 Introduction

Toute mesure est entachée d'erreur. Il est impossible d'effectuer des mesures rigoureusement exactes. Pour rendre compte du degré d'approximation auquel nous travaillons, nous devons estimer les erreurs commises dans les diverses mesures et nous devons calculer leurs conséquences dans les résultats obtenus. C'est le but du ***calcul d'erreur ou calcul d'incertitude***.

3.2 Instrument de mesure et sensibilité

Mesure des dimensions d'une feuille A4 :



Instrument utilisé : règle graduée
La plus petite quantité mesurable : 1 mm

Définition : On appelle **sensibilité** d'un instrument de mesure, la plus petite quantité qu'il est capable de discerner.

3.3 Les chiffres significatifs

3.3.1 Mesures et chiffres significatifs

Longueur de la feuille A4 :

$$L = 27{,}7 \text{ cm}$$

Chiffres que la règle graduée nous permet de connaître

Définition : Dans un nombre représentant le résultat d'une mesure, un chiffre est appelé **significatif** si l'instrument nous permet de le connaître avec une fiabilité suffisante.

Il serait incohérent d'écrire notre résultat :

$$L = 27{,}7\mathbf{0} \text{ cm}$$

Chiffre que la règle graduée ne nous permet **pas** de connaître

Par contre, si l'on exprime cette longueur en mètre, on obtient :

$$L = 0{,}0277 \text{ m}$$

Ces chiffres ne sont **pas** significatifs, ils n'indiquent que la position de la virgule

*Les **zéros à gauche** d'un nombre représentant le résultat d'une mesure, ne sont pas des chiffres significatifs*, ils indiquent uniquement la position de la virgule.

<u>Exemples</u> :
- 0,035 [m] contient ………… chiffres significatifs.
- 0,000 04 [kg] contient ………… chiffre significatif.

*Les **zéros au milieu et à droite** d'un nombre représentant le résultat d'une mesure, sont des chiffres significatifs.*

<u>Exemple</u> : 0,07040800 s contient ………… chiffres significatifs.

Dans un nombre représentant le résultat d'une mesure, on ne fait figurer que les chiffres significatifs.

<u>Exercice</u> : 45,2 m = ……………………………………………..….………… mm.
D'où la nécessité d'utiliser l'écriture scientifique.

3.3.2 Calculs et chiffres significatifs

Des calculs font souvent intervenir des nombres représentant des quantités mesurées. Nous devons donc savoir comment manipuler des opérations avec des nombres contenant des chiffres significatifs.

Un calcul ne peut pas améliorer la précision d'une mesure.

Cette règle générale sera satisfaite en appliquant les règles particulières ci-dessous :

Règle 1
*Un nombre représentant un **produit** ou un **quotient**, est arrondi de sorte qu'il ne contienne pas plus de chiffres significatifs que le nombre utilisé dans le calcul, qui en contient le moins.*

<u>Exemple</u> : $\underbrace{1,1}_{\textbf{2}\text{ chiffres significatifs}} \text{ mm} \cdot \underbrace{5,03}_{\textbf{3}\text{ chiffres significatif}} \text{ mm} = 5,533 \text{ mm}^2$

D'après cette règle, le résultat doit s'écrire : $\underbrace{5,5}_{\textbf{2}\text{ chiffres significatifs}} \text{ mm}^2$.

Règle 2
*Un nombre représentant une **somme** ou une **différence**, est arrondi de sorte qu'il ait autant de décimales (chiffres après la virgule) que le nombre utilisé dans le calcul, qui en contient le moins.*

Exemple : $\underbrace{120}_{\mathbf{0}\text{ décimale}}\ \text{s} - \underbrace{40{,}1}_{1\text{ décimale}}\ \text{s} = 79{,}9\ \text{s}$

D'après cette règle, le résultat doit s'écrire : $\underbrace{80}_{\mathbf{0}\text{ décimale}}\ \text{s}$.

3.4 Les incertitudes

3.4.1 Sources d'incertitudes

L'incertitude qui affecte toute mesure est essentiellement due à deux facteurs :

a) **Les incertitudes d'appareils** : l'instrument utilisé pour la mesure a une sensibilité limitée.
Exemples : - graduation d'une règle (1 mm)
- saut de l'aiguille d'un chronomètre (0,1 s).

b) **Les incertitudes humaines** : l'expérimentateur introduit une incertitude de manipulation.
Exemples : - mesure d'une longueur (erreur de lecture)
- mesure d'un temps (erreur d'appréciation des instants d'enclenchement et de déclenchement du chronomètre).

3.4.2 Détermination des incertitudes

On distingue dans un laboratoire, deux types de grandeurs physiques :

a) **Les grandeurs mesurées** : elles sont le résultat d'une mesure effectuée par l'expérimentateur à l'aide d'un instrument.
Exemple : mesure de la température ambiante à l'aide d'un thermomètre.

b) **Les grandeurs calculées** : elles sont le résultat d'un calcul découlant d'une loi, ou d'une formule et font intervenir des grandeurs mesurées.
Exemple : calcul du volume d'un cylindre en fer, dont les dimensions ont été préalablement mesurées.

A. Incertitude sur une grandeur mesurée

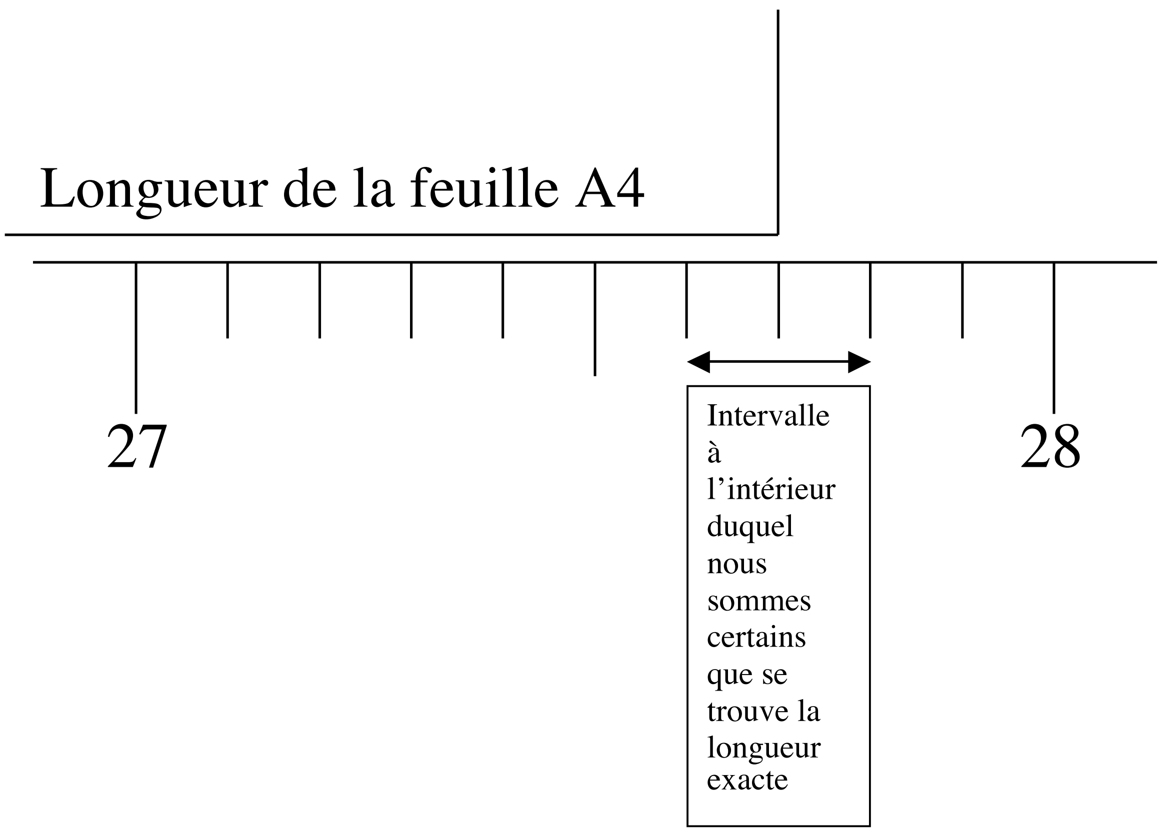
Mesure unique

L'incertitude absolue

Longueur de la feuille A4 :

$$L = 27{,}7 \text{ cm}$$

Chiffres le moins fiable car correspondant à la plus petite quantité mesurable



On peut noter cet intervalle :

$$27{,}6 \leq L \leq 27{,}8$$

ou encore :

$$L = 27{,}7 \pm \underbrace{0{,}1}_{\text{demi-intervalle}} \text{ cm}$$

L'indication complète du résultat d'une mesure (notée a) comportera donc la valeur que nous estimerons la plus probable (notée a_{mes}) suivie de la moitié de l'intervalle (notée Δa) auquel appartient avec certitude la valeur exacte :

$$a = a_{mes} \pm \underbrace{\Delta a}_{\text{incertitude absolue}}$$

Définition : On appelle **incertitude absolue** (**Δa**) d'une mesure, la moitié de l'intervalle à l'intérieur duquel nous sommes certain que se trouve la valeur exacte de cette mesure.

Remarque : Δa est la somme de l'incertitude d'appareil (Δa_A) et de l'incertitude humaine (Δa_H) : $\Delta a = \Delta a_A + \Delta a_H$. On prend habituellement pour l'incertitude d'appareil, la sensibilité de l'instrument de mesure utilisé (1 mm dans l'exemple ci-dessus). L'incertitude humaine doit quant à elle, être estimée.

L'incertitude relative

La qualité d'une mesure s'exprime par le rapport entre son incertitude absolue (Δa) et la mesure elle-même (a_{mes}). Ce rapport s'appelle l'**incertitude relative** ou **précision** de la mesure :

Définition : On appelle **incertitude relative** (ou **précision**) d'une mesure, le quotient de l'incertitude absolue de cette mesure par la mesure elle-même. Elle se note :

$$\frac{\Delta a}{a_{mes}}$$

et s'exprime en %.

Exemple : Dans le cas de la longueur de la feuille A4, on a :
$\Delta L/L = 0{,}1 \text{ cm}/27{,}7 \text{ cm} \approx 0{,}004 = 0{,}4\ \%$

Mesure répétée

Si la mesure d'une même grandeur a répétée plusieurs fois (n fois) donne les valeurs a_1 ; a_2 ; a_3 ; … ; a_n, on prend pour valeur de la grandeur a, la moyenne arithmétique des n valeurs mesurées :

$$\boxed{a = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}}$$

L'incertitude absolue sur a (incertitude statistique) est dans ce cas donnée par :

$$\boxed{\Delta a = \frac{a_{\max} - a_{\min}}{2}}$$

Où $a_{\max}$ et $a_{\min}$ sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur parmi les n valeurs mesurées.

B. Incertitude sur une grandeur calculée

En physique, les grandeurs que nous mesurons sont généralement utilisées pour déduire des résultats par des calculs. Nous devons donc savoir comment les incertitudes des grandeurs mesurées se répercutent sur les incertitudes des grandeurs calculées.

Illustration par le calcul de l'aire d'une page A4.

Longueur de la page : $L = 27{,}7 \pm 0{,}1$ cm
Largeur de la page : $l = 21{,}1 \pm 0{,}1$ cm

- L'aire *maximale* de la page est donnée par :

$$\begin{aligned} A_{max} &= (L + \Delta L)(l + \Delta l) \\ &= (27{,}7 + 0{,}1)(21{,}1 + 0{,}1) \\ &= 27{,}8 \cdot 21{,}2 \\ &\approx 589 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

- L'aire *minimale* de la page est donnée par :

$$\begin{aligned} A_{min} &= (L - \Delta L)(l - \Delta l) \\ &= (27{,}7 - 0{,}1)(21{,}1 - 0{,}1) \\ &= 27{,}6 \cdot 21{,}0 \\ &\approx 578 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

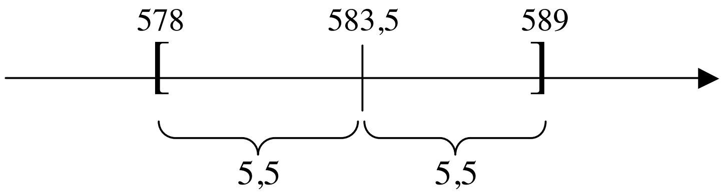
L'aire exacte de la page se trouve donc dans l'intervalle :

$$578 \text{ cm}^2 \le A \le 589 \text{ cm}^2$$

La largeur de cet intervalle est de 589 cm^2 – 578 cm^2 = 11 cm^2

On peut noter l'aire :

$$A = \underbrace{583{,}5}_{\substack{\mathbf{578 + 5{,}5} \\ \mathbf{589 - 5.5}}} \pm \underbrace{5{,}5}_{\textbf{demi-intervalle}} \text{ cm}^2$$



Une grandeur calculée *A* s'exprime donc :

$$A = \overline{A} \pm \Delta A$$

où :

$$\overline{A} = \frac{A_{\min} + A_{\max}}{2}$$

le milieux de l'intervalle $\left[A_{\min}; A_{\max}\right]$

et :

$$\Delta A = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{2}$$

la demi largeur de l'intervalle $\left[A_{\min}; A_{\max}\right]$