Volume et température d'un gaz

Par Pascal Rebetez

Janvier 2007

Introduction

Après avoir étudié expérimentalement la relation entre le volume et la température d'un gaz (de l'air), nous comparons les données expérimentales obtenues au modèle du gaz parfait à pression constante. Ce modèle ne décrivant pas correctement les données, nous étudions théoriquement le comportement du gaz en tenant compte de sa variation de pression. Nous obtenons une relation théorique entre le volume et la température du gaz, que nous comparons aux données expérimentales. Nous discutons finalement un cas de figure de la solution théorique qui semble physiquement surprenant.

Description de l'expérience

On cherche à étudier la relation entre le volume et la température d'un gaz (de l'air) à l'aide du dispositif représenté ci-dessous :

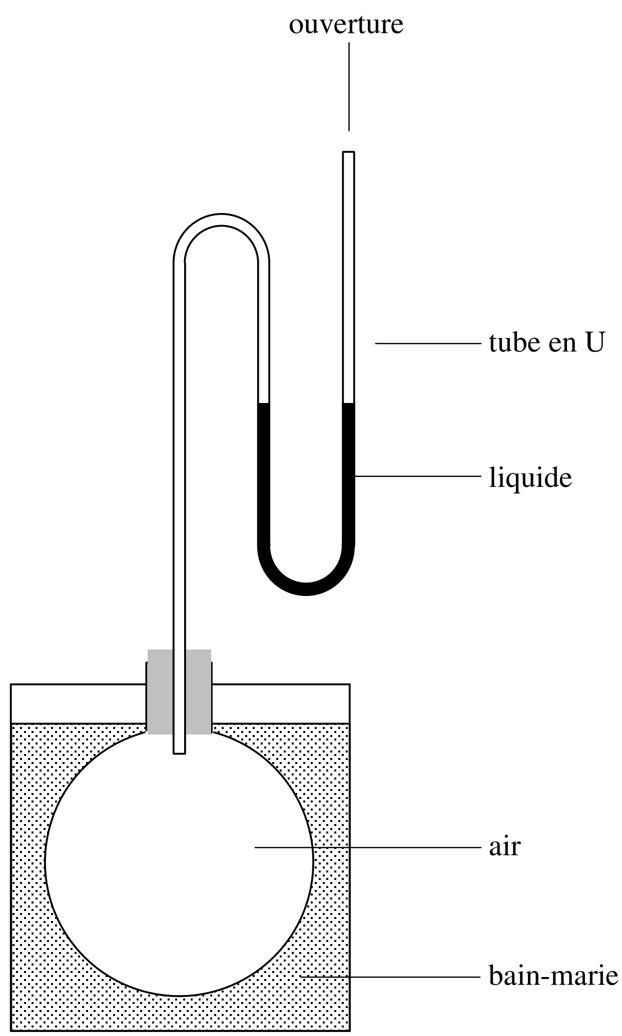

Figure 1 : Schéma du dispositif expérimental

Un ballon d'air est immergé dans un bain-marie dont on mesure la température à l'aide d'un thermomètre. On commence l'expérience en s'assurant que les deux niveaux de liquide dans le tube en U soient à la même hauteur puis on mesure la température du bain-marie, qui une fois stabilisée est supposée être la même que celle de l'air contenu dans le ballon. On augmente la température du bain-marie en y ajoutant un peu d'eau bouillante. On mesure ensuite la température du bain-marie et une fois celle-ci stabilisée, on mesure l'élévation du niveau du liquide dans la branche de droite du tube en U. On effectue ainsi plusieurs mesures de la température de l'air en fonction de son augmentation de volume, laquelle est proportionnelle à l'élévation du niveau du liquide.

Résultats des mesures

La représentation graphique des mesures effectuées, à savoir le graphique de la température T en K de l'air contenu dans le ballon, en fonction de son augmentation de volume ΔV en m^3 (où ΔV est proportionnelle à l'élévation du niveau du liquide dans la branche de droite du tube en U), donne des points assez bien alignés, comme l'indique le graphique ci-dessous (le carré du coefficient de corrélation est très proche de 1) :

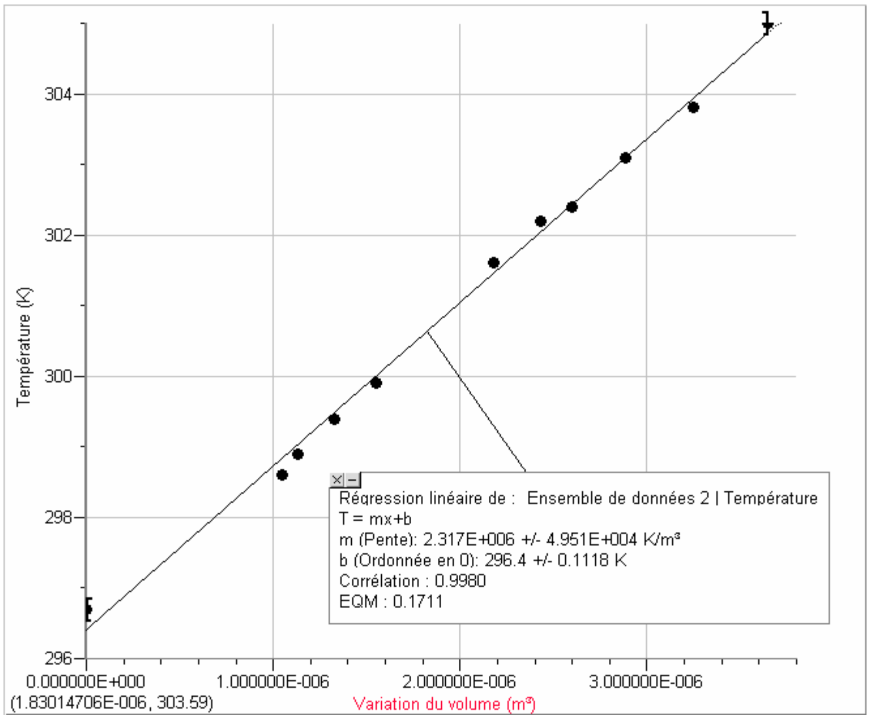

Figure 2 : Température du gaz en fonction de sa variation de volume

La représentation graphique de la température T en fonction du volume V (où $V = V_0 + \Delta V$ avec V_0 désignant le volume initial du gaz) donne :

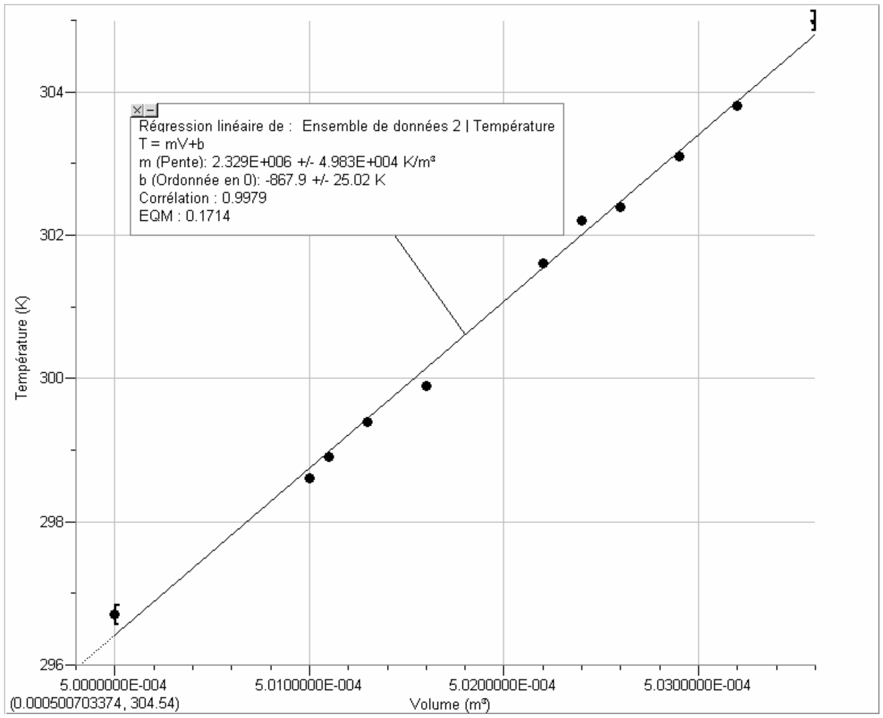

Figure 3 : Température du gaz en fonction de son volume

C'est ce que prévoit la loi des gaz parfaits puisque celle-ci stipule que pression, volume et température (absolue) d'un gaz, obéissent à l'équation :

$$pV = nRT$$

Le volume et la température d'un gaz parfait, sont proportionnels. Il découle de cette équation que la température absolue tend vers 0 K (le zéro absolu), lorsque le volume tend vers 0 m^3. En extrapolant la droite correspondant aux points expérimentaux, celle-ci devrait avoir une ordonnée à l'origine valant environ 0 K = – 273 °C. La figure ci-dessous illustre cette situation, mais le volume est sur ce graphique en ordonnée et la température en abscisse.

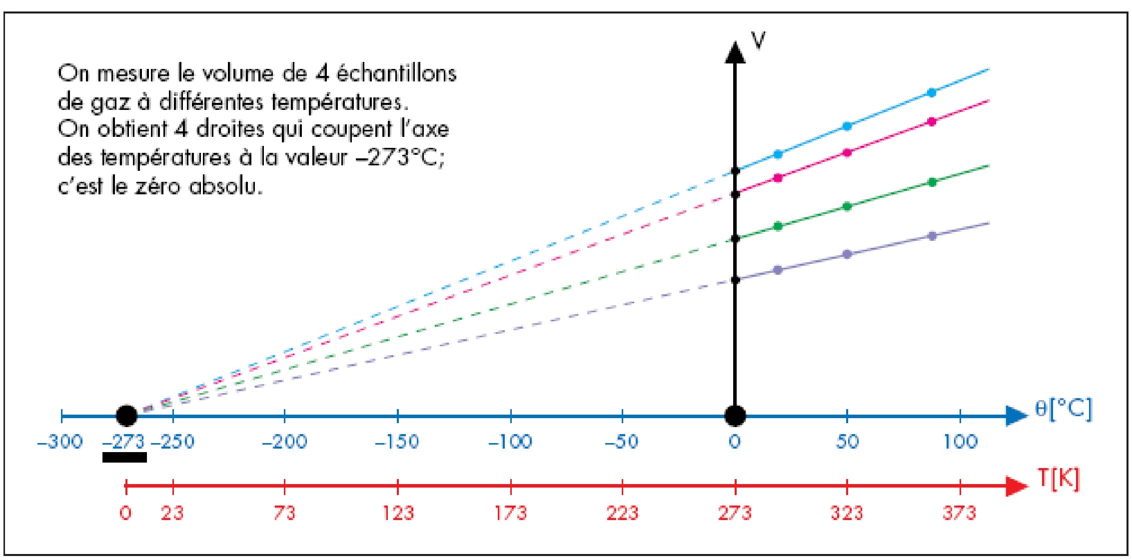

Figure 4 : Volume d'un gaz parfait en fonction de sa température

Cependant, comme l'indique notre graphique de T en fonction de V (c.f. figure 3), l'ordonnée à l'origine de la droite de régression ajustée aux données expérimentales, a une valeur négative valant – 868 K, au lieu d'une valeur proche de 0 K comme l'on pourrait s'y attendre. Comment expliquer cela ? Une hypothèse est que la différence de hauteur entre les niveaux de liquide dans le deux branches du tube en U, a pour conséquence une augmentation de la pression de l'air dans le ballon, au fur et à mesure de son augmentation de volume (c.f. figure 5). La pression de l'air dans le ballon n'est dans ces conditions pas constante lorsque sa température varie, comme on l'avait implicitement supposé ci-dessus. Nous allons dans la suite étudier cette hypothèse et exprimer la température du gaz en fonction de son volume, en tenant compte de cette variation de pression.

Étude théorique

- Pression du gaz

Le gaz est supposé se comporter comme un gaz parfait :

$$pV = nRT \qquad (1)$$

Puisque le liquide est à l'équilibre statique dans le tube en U, une fois la température et le volume du gaz stabilisés, la pression du gaz est égale à la pression hydrostatique totale à une profondeur $2h$ dans le liquide de la branche de droite du tube en U (c.f. figure 5). Cette pression est donnée par :

$$p = p_0 + 2\rho gh \qquad (2)$$

où
p_0 : pression atmosphérique, en Pa
ρ : masse volumique du liquide (dans le tube en U), en kg/m^3
g : accélération de la pesanteur, en m/s^2
h : élévation du niveau du liquide dans la branche de droite du tube en U, en m

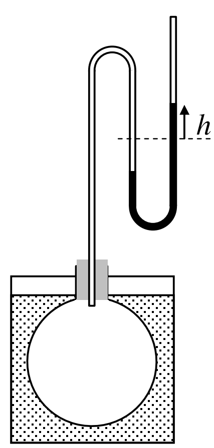

Figure 5 : Déplacement du liquide dû à la dilatation du gaz

Exprimons l'élévation h du niveau du liquide en fonction de la variation de volume ΔV du gaz :

$$\Delta V = \pi r^2 h \qquad (3)$$

où r : rayon intérieur de la branche de droite du tube en U, en m

d'où

$$h = \frac{\Delta V}{\pi r^2} \tag{4}$$

La pression peut ainsi s'exprimer en fonction de la variation de volume, en insérant (4) dans (2) :

$$p = p_0 + \frac{2\rho g}{\pi r^2} \Delta V \tag{5}$$

- Expression de V en fonction de ΔV :

$$V = V_0 + \Delta V \tag{6}$$

- Expression de nR en fonction de p_0, V_0 et T_0 :

  D'après la loi des gaz parfaits,

$$pV = nRT$$

  d'où

$$\frac{pV}{T} = nR = \frac{p_0 V_0}{T_0} \tag{7}$$

- Expression de la température du gaz en fonction de son volume :

  En insérant (5), (6) et (7) dans (1), on obtient :

$$(p_0 + c\Delta V)(V_0 + \Delta V) = \frac{p_0 V_0}{T_0} T \tag{8}$$

  où $c \equiv \dfrac{2\rho g}{\pi r^2}$

  En développant et regroupant les termes de l'équation (8), on obtient l'expression :

$$T = \alpha \Delta V^2 + \beta \Delta V + \gamma \tag{9}$$

  où $\alpha \equiv \dfrac{2\rho g T_0}{\pi r^2 p_0 V_0} > 0$

  $\beta \equiv \dfrac{T_0}{V_0} + \dfrac{2\rho g T_0}{\pi r^2 p_0} > 0$

  $\gamma \equiv T_0 > 0$

L'équation (9) montre que la température est un polynôme du deuxième degré de la variation de volume ΔV. Pour exprimer la température en fonction du volume V, il suffit d'exprimer ΔV en fonction de V :

$$\Delta V = V - V_0$$

et d'insérer cette expression dans l'équation (9), ce qui après développement donne finalement :

$$T = \alpha' V^2 + \beta' V \tag{10}$$

où $\alpha' = \alpha = \dfrac{2\rho g T_0}{\pi r^2 p_0 V_0} > 0$

$$\beta' = \beta - 2\alpha V_0 = \frac{T_0}{V_0} - \frac{2\rho g T_0}{\pi r^2 p_0}$$

La température (absolue) T du gaz, est donc un polynôme de degré 2 de son volume V. La représentation graphique de la température en fonction du volume est une parabole de courbure positive et d'ordonnée à l'origine nulle. Le coefficient β' apparaissant dans l'équation (10), est égal à la pente de la tangente à cette parabole à l'origine. Il peut être positif, nul ou négatif selon la valeur des paramètres p_0, V_0, T_0, ρ et r. Les graphiques ci-dessous illustrent ces trois cas de figure :

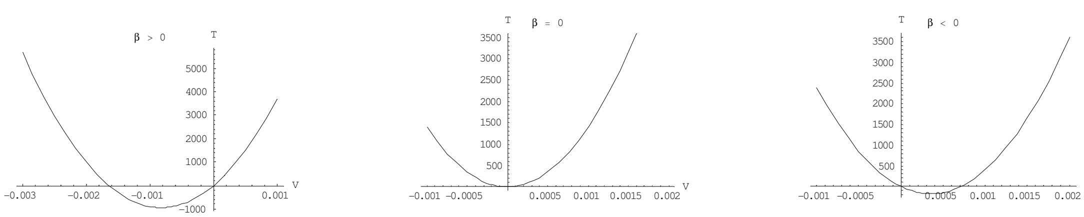

Figure 6 : Température du gaz en fonction de son volume ; trois cas de figure sont possibles

Interprétation des mesures

- Linéarité

La linéarité apparente de la relation entre nos données expérimentales (c.f. figure 3), s'explique par le fait que l'intervalle de température auquel appartiennent nos mesures (environ 8 K), est extrêmement petit par rapport à celui séparant ces mesures du zéro absolu (environ 301 K). L'arc de parabole auquel appartiennent théoriquement nos points expérimentaux, apparaît comme un segment sur un aussi petit intervalle de température. La figure 7 illustre cette situation ; elle représente un arc de parabole pour un petit intervalle de température. Cet arc semble rectiligne, sa courbure est à peine perceptible.

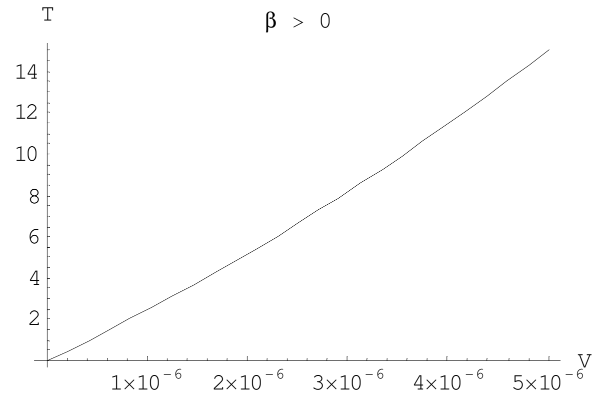

Figure 7 : Température du gaz en fonction de son volume sur une petite plage de température

- Ordonnée à l'origine

  La valeur négative de l'ordonnée à l'origine de la droite de régression ajustée aux données expérimentales (– 868 K, c.f. figure 3), est due au fait que cette droite est approximativement la tangente à la parabole à laquelle appartiennent théoriquement nos points expérimentaux. Cette droite est tangente à la parabole en un point voisin de l'un des points expérimentaux. La courbure de la parabole étant positive et son ordonnée à l'origine nulle, une droite tangente à cette parabole sur sa partie correspondant à des volume V positif, aura obligatoirement une ordonnée à l'origine négative. La figure 8 illustre cette situation :

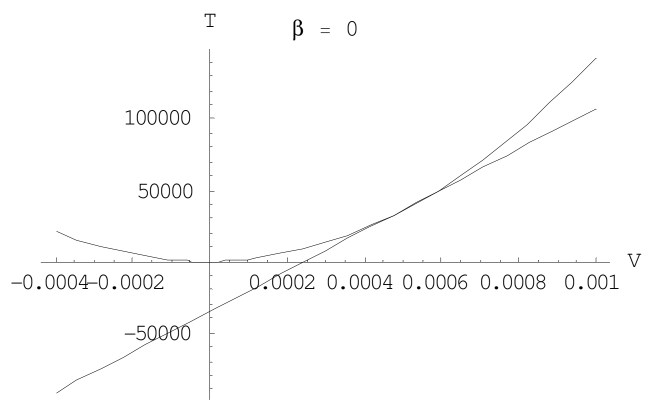

Figure 8 : La tangente à la parabole en V > 0, a une ordonnée à l'origine négative

Comparaison des données expérimentales aux prévisions théoriques

Les coefficients α' et β' apparaissant dans la relation théorique (10), dépendent des paramètres p_0, V_0 et T_0 caractérisant l'état initial du gaz et des paramètres ρ et r, caractérisant le dispositif expérimental (c.f. équation (10)). Ces cinq paramètres ont été mesurés lors de l'expérience, ce qui nous permet de calculer la courbe théorique $T = f(V)$ illustrée par la figure 6 et de la comparer à la « courbe » expérimentale représentée à la figure 3. Plutôt que de comparer les deux courbes, nous allons plutôt comparer la droite de régression linéaire correspondant aux points expérimentaux (dont les coefficients - pente et ordonnée à l'origine - sont donnés à la figure 3), à celle correspondant aux points calculés de la courbe théorique. Cette droite de régression est approximativement la tangente à la parabole représentée à la figure 8.

Dans Le tableau ci-dessous figurent les données expérimentales et les résultats de cette expérience.

V (m^3)	T (K)	T*(V)(°C)						
			p_0 = 97600	N/m^2				
5.000E-04	296.7	296.7	V_0 = 5.00E-04	m^3				
5.010E-04	298.6	299.5	θ_0 = 23.5	°C				
5.011E-04	298.9	299.7	T_0 = 296.65	K				
5.013E-04	299.4	300.2	ρ = 998	kg/m^3				
5.016E-04	299.9	300.9	g = 9.81	N/kg				
5.022E-04	301.6	302.5	r = 3.00E-03	m				
5.024E-04	302.2	303.2	α = 4.21E+09	°C/m^6	α' = 4.21E+09	°C/m^6	A* = 2715211	K/m^3
5.026E-04	302.4	303.7	β = 2.70E+06	°C/m^3	β' = -1.51E+06	°C/m^3	B* = -1061	K
5.029E-04	303.1	304.5	γ = 296.65		γ' = 0.00E+00			
5.032E-04	303.8	305.5	a = 65.496	K/m			A = 2317619	K/m^3
5.036E-04	305.0	306.5	b = 296.360	K			B = -862	K

Remarques :

T(h) = ah + b (droite expérimentale)

T(V) = AV + B (droite expérimentale)

$T^*(\Delta V) = \alpha V^2 + \beta V + \gamma$ (relation théorique entre T (K) et ΔV (m^3))

$T^*(V) = \alpha' V^2 + \beta' V$ (relation théorique entre T (K) et V (m^3))

$T_d^*(V) = A^*V + B^*$ (droite ajustée sur la courbe théorique de degré 2)

$T_d(V) = AV + B$ (droite ajustée sur la courbe expérimentale de degré 2)

(A*-A)/A* = 15.0 %

(B*-B)/B* = 19.0 %

Figure 9 : Tableau des données, version 1

Les écarts relatifs entre les coefficients théoriques et expérimentaux des droites de régressions, sont de 15 % pour les pentes et 19 % pour les ordonnées à l'origine. Ces quatre coefficients A, B, A* et B* dépendent eux-mêmes des cinq paramètres p_0, V_0, T_0, ρ et r mesurés durant l'expérience et sont donc entachés d'incertitudes, lesquelles se répercutent sur la valeur des écarts relatifs mentionnés ci-dessus. Les incertitudes de mesure portent essentiellement sur les paramètres p_0, V_0, et r. En augmentant de 4 % la valeur de p_0, de 10 % celle de V_0 et en diminuant de 10 % la valeur de r, le tableau ci-dessous indique que les écarts relatifs sont réduits à 7 % et 9 %.

V (m^3)	T (K)	T*(V)(°C)						
			p_0 = 100000	N/m^2				
5.500E-04	296.7	296.7	V_0 = 5.50E-04	m^3				
5.508E-04	298.6	299.3	θ_0 = 23.5	°C				
5.509E-04	298.9	299.5	T_0 = 296.65	K				
5.511E-04	299.4	300.0	ρ = 998	kg/m^3				
5.513E-04	299.9	300.5	g = 9.81	N/kg				
5.518E-04	301.6	302.1	r = 2.70E-03	m				
5.520E-04	302.2	302.7	α = 4.61E+09	°C/m^6	α' = 4.61E+09	°C/m^6	A* = 3091071	K/m^3
5.521E-04	302.4	303.2	β = 3.08E+06	°C/m^3	β' = -2.00E+06	°C/m^3	B* = -1403	K
5.523E-04	303.1	303.9	γ = 296.65		γ' = 0.00E+00			
5.526E-04	303.8	304.8	a = 65.496	K/m			A = 2861258	K/m^3
5.530E-04	305.0	305.8	b = 296.360	K			B = -1277	K

Remarques :

T(h) = ah + b (droite expérimentale)

T(V) = AV + B (droite expérimentale)

$T^*(\Delta V) = \alpha V^2 + \beta V + \gamma$ (relation théorique entre T (K) et ΔV (m^3))

$T^*(V) = \alpha' V^2 + \beta' V$ (relation théorique entre T (K) et V (m^3))

$T_d^*(V) = A^*V + B^*$ (droite ajustée sur la courbe théorique de degré 2)

$T_d(V) = AV + B$ (droite ajustée sur la courbe expérimentale de degré 2)

(A*-A)/A* = 7.0 %

(B*-B)/B* = 9.0 %

Figure 10 : Tableau des données, version 2

On réalise que l'on pourrait sans difficulté trouver une combinaison de valeurs raisonnables pour ces cinq paramètres mesurés, qui rendrait nuls ou presque les écarts entre les valeurs théoriques et expérimentales des pentes et ordonnées à l'origine des droites de régression. Le modèle théorique s'ajuste donc bien aux données expérimentales.

Discussion de la solution théorique

La relation théorique (10) entre la température et le volume du gaz, comporte trois possibilités (c.f. figure 6). L'une d'elles correspond à une valeur négative du coefficient β', ce qui physiquement signifie qu'il existe une valeur positive en dessous de laquelle le volume du gaz ne peut descendre, même lorsque sa température tend vers le zéro absolu. Sur les figures 9 et 10, les tableaux des données indiquent que la valeur de ce coefficient dans notre expérience correspond à ce cas de figure, puisqu'elle est négative. On peut interpréter cette étrangeté de la manière suivante ; la solution (10) a été obtenue en supposant que le gaz se comporte comme un gaz parfait. Cette hypothèse se justifie à basse pression et pour autant que la température du gaz soit très supérieure à sa température de condensation, ce qui n'est pas le cas au voisinage du zéro absolu. On en conclut donc que la solution théorique (10) et en particulier celle correspondant à un coefficient β' négatif, n'est plus valable dans cette plage de température.

Conclusion

Le but initial de cette expérience était de vérifier la linéarité de la relation entre le volume et la température d'un gaz, à l'aide du dispositif décrit à la figure 1. Nous supposions alors que la différence de hauteur des niveaux du liquide dans le tube en U, avait un effet négligeable sur la variation de la pression du gaz lors de sa dilatation. Si l'on s'était limité à l'étude de cette linéarité, nous n'aurions pas mené notre étude au-delà de cet aspect, puisque la linéarité du graphique de la figure 3 était satisfaisante. C'est en portant notre attention sur la température à laquelle le volume du gaz tend vers zéro et en constatant que cette température est très différente du zéro absolu, que nous avons pu mettre en évidence le fait que la relation entre le volume et la température du gaz n'est en réalité pas linéaire et que cela est dû au fait que la différence de hauteur des niveaux du liquide dans le tube en U a un effet non négligeable sur la variation de pression du gaz, contrairement à ce que nous avions supposé avant d'effectuer les mesures.
C'est donc l'extension de notre étude à plusieurs propriétés du gaz (relation entre volume et température ainsi que température à laquelle le volume tend vers zéro), qui nous a permis de comprendre son comportement réel.